



# Etude théorique de la dynamique d'une bulle dans un tube capillaire chauffé

Antoine Voirand

## ► To cite this version:

Antoine Voirand. Etude théorique de la dynamique d'une bulle dans un tube capillaire chauffé. Autre. ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique - Poitiers, 2016. Français. <NNT : 2016ESMA0008>. <tel-01371841>

**HAL Id: tel-01371841**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01371841>**

Submitted on 26 Sep 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

Pour l'obtention du grade de

## DOCTEUR DE L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE ET D'AEROTECHNIQUE

(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

Ecole doctorale : Sciences et Ingénierie en Matériaux, Mécanique, Energétique et Aéronautique

Secteur de recherche : Mécanique des milieux fluides et Energie, Thermique, Combustion

Présentée par

**Antoine VOIRAND**

---

## Etude théorique de la dynamique d'une bulle dans un tube capillaire chauffé

---

Directeur de thèse : **Yves BERTIN**

Encadrant : **Adel M. BENSELAMA**

\*\*\*\*\*

Soutenu le 18 Juillet 2016

devant la commission d'examen

\*\*\*\*\*

### - JURY -

J. Bonjour	Professeur (CETHIL, Lyon)	Président du jury
K. Sefiane	Professeur (University of Edinburgh, UK)	Rapporteur
L. Tadrist	Professeur (IUSTI, Marseille)	Rapporteur
V. Nikolayev	Directeur de recherche (CEA, Saclay)	Examineur
M. Miscevic	Maitre de conférences (Laplace, Toulouse)	Examineur
J. Borée	Professeur (ISAE-ENSMA, Poitiers)	Examineur
Y. Bertin	Professeur (ISAE-ENSMA, Poitiers)	Examineur
A. M. Benselama	Maitre de conférences (ISAE-ENSMA, Poitiers)	Examineur



## Avant-propos

Les quatre années de travail qui ont été nécessaire pour écrire cette thèse ont représenté une expérience et un développement personnel que je ne pouvais pas imaginer en commençant cette aventure, à l'automne 2012. Surtout, il ne faudrait pas voir le travail qui est présenté ici comme uniquement personnel. Il est le fruit d'une longue maturation qui a été rendu possible par les efforts conjugués d'un nombre important de personne qui y ont contribué continûment ou ponctuellement, scientifiquement ou humainement. Il me serait impossible de les citer tous, mais je voudrais qu'ils trouvent dans ces quelques lignes l'expression de ma plus sincère reconnaissance. Cette thèse est aussi un peu la leur.

Parmi toutes ces personnes, mes premiers remerciements s'adressent à monsieur Jocelyn Bonjour, qui a gracieusement accepté de présider le jury de cette thèse, ainsi qu'à messieurs Khelil Sefiane et Lounès Tadrast, pour avoir bien voulu prendre de leur temps, que je sais précieux, pour rapporter ce travail, ainsi que pour leurs judicieuses remarques et questions. Je veux aussi étendre mes remerciements à monsieur Vadim Nikolayev, pour les nombreuses conversations que nous avons pu avoir tout au long de ces quatre années, qui m'ont indubitablement aidé à progresser dans la compréhension de mon sujet, ainsi qu'aux autres membres du jury, Marc Miscevic et Jacques Borée.

Malgré ma faible expérience de la question, je ne crois pas qu'il existe un tandem de directeurs de thèse plus efficace et complémentaire qu'Yves Bertin et Adel Benselama. Je crois par contre qu'Adel aurait autant de droit que moi à la paternité de ce mémoire, tant les pages qui suivent découlent en droite ligne de notre collaboration de tous les jours. Très souvent ses connaissances et ses idées ont permis de résoudre des difficultés qui m'auraient été insurmontable seul. Yves a quant à lui été pour moi une source inépuisable d'amélioration, tant dans le sens physique, indispensable pour ne pas s'enterrer dans des considérations trop mathématique, que dans la pédagogie, pour mettre en valeur les résultats obtenus. Ils ont tous les deux eu une influence déterminante sur ces quelques années, qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude à leur rencontre.

L'ensemble de l'équipe de l'axe COST de l'institut PPrime mérite elle aussi de chaleureux remerciements de ma part, pour les conversations, suggestions, idées (je pense en particulier à Vincent et Cyril), ainsi que pour cette ambiance de travail agréable et détendu, qui est un gage de qualité humaine de la part de tous qu'il faut souligner. Merci à tous !

Après avoir exprimé ma profonde reconnaissance au grand docteur de Padoue, je veux aussi remercier mes parents, ma famille et mes amis, pour avoir exercé mes capacités de vulgarisation (" Mais du coup, ça sert à quoi ce que tu fais ? "), et plus sérieusement pour leurs soutiens depuis toujours. Arriver à la fin d'une thèse n'est pas seulement un travail de quelques années. Ce travail a été rendu possible par l'éducation et l'enseignement que j'ai pu recevoir depuis mes plus jeunes années.

À Céline.



# Table des matières

Table des figures	ix
Nomenclature	xiii
Présentation générale	1
<b>Partie I Élaboration du modèle</b>	<b>5</b>
<b>Chapitre 1 Du caloduc oscillant à la bulle</b>	<b>7</b>
1.1 Généralités sur les caloducs . . . . .	7
1.2 Caloducs oscillants - Intérêt et performance . . . . .	10
1.3 Modélisation des caloducs oscillants . . . . .	13
1.4 Film de liquide . . . . .	15
1.4.1 Hypothèses de lubrification . . . . .	15
1.4.2 Film adsorbé . . . . .	17
1.4.3 Ligne triple . . . . .	18
1.5 Bulle contenue dans un capillaire . . . . .	20
1.5.1 Modélisation . . . . .	20
1.5.2 Assèchement du film déposé . . . . .	22
1.6 Contribution du présent mémoire . . . . .	23
<b>Chapitre 2 Modélisation de la phase liquide</b>	<b>25</b>
2.1 Équations de conservation . . . . .	25

2.1.1	Description du domaine . . . . .	25
2.1.2	Modélisation de la phase liquide . . . . .	28
2.2	Conduction dans la paroi solide . . . . .	29
2.2.1	Quelle méthode de résolution ? . . . . .	29
2.2.2	Problème final . . . . .	31
2.3	Physique de l'interface . . . . .	32
2.3.1	Conditions dynamiques . . . . .	32
2.3.2	Condition thermique . . . . .	36
2.4	Adimensionnement - Problème complet . . . . .	36
2.4.1	Définition des grandeurs caractéristiques . . . . .	37
2.4.2	Modélisation finale . . . . .	38
2.5	Conclusion . . . . .	40
<b>Chapitre 3 Démarche et méthode de résolution</b>		<b>41</b>
3.1	Structuration de la résolution . . . . .	41
3.1.1	Principes de base . . . . .	41
3.1.2	Différentes longueurs caractéristiques . . . . .	42
3.2	Les modèles du film de liquide et de transition . . . . .	44
3.2.1	Modèle du film de liquide . . . . .	45
3.2.2	Région de transition . . . . .	47
3.3	Méthode de résolution . . . . .	49
3.3.1	Développement en série de Taylor . . . . .	49
3.3.2	La méthode de perturbation du domaine . . . . .	51
3.4	Généralités sur la procédure de résolution . . . . .	53
3.4.1	Problème associé aux ménisques . . . . .	53
3.4.2	Région du film et régions de transition . . . . .	54
3.5	Raccordement . . . . .	56
3.5.1	Entre le ménisque avant et la transition . . . . .	56
3.5.2	Entre la transition et le film de liquide . . . . .	57

---

3.5.3	Entre le ménisque arrière et la transition . . . . .	58
3.6	Conclusion . . . . .	58
<b>Partie II Résultats</b>		<b>61</b>
<b>Chapitre 4 Ménisque avant - Ordre principal</b>		<b>63</b>
4.1	Forme du ménisque . . . . .	64
4.2	Le film mince . . . . .	64
4.3	La région de transition . . . . .	68
4.4	Raccordement et détermination de $\delta^{[00]}$ . . . . .	72
4.5	Résultats et analyses . . . . .	74
4.6	Champ de température dans le bouchon liquide . . . . .	78
4.7	Conclusion . . . . .	81
<b>Chapitre 5 Ménisque avant - Montée en ordre</b>		<b>83</b>
5.1	Dynamique dans la région du ménisque . . . . .	84
5.1.1	Forme du ménisque aux premiers ordres en $Ca^{1/3}$ et $Re$ . . . . .	84
5.1.2	Deuxième ordre en $Ca^{1/3}$ . . . . .	86
5.1.3	Ordres supérieurs en $Re$ . . . . .	88
5.1.4	Champ de vitesse au troisième ordre en $Ca^{1/3}$ . . . . .	89
5.1.5	Prise en compte de l'inertie: ordre 31 . . . . .	92
5.2	Thermique dans la région du ménisque . . . . .	94
5.2.1	Premier ordre en $Ca^{1/3}$ . . . . .	94
5.2.2	Premier ordre en $Re$ . . . . .	95
5.2.3	Deuxième ordre en $Ca^{1/3}$ . . . . .	96
5.3	Bilan sur la région du ménisque . . . . .	98
5.4	Film et transition aux premiers ordres en $Ca^{1/3}$ et $Re$ . . . . .	100
5.4.1	Région du film de liquide . . . . .	100
5.4.2	Région de transition . . . . .	101



5.5	Film et transition aux ordres supérieurs en $Re$ . . . . .	104
5.6	Film et transition au deuxième ordre en $Ca^{1/3}$ . . . . .	105
5.6.1	Film de liquide . . . . .	105
5.6.2	Région de transition . . . . .	107
5.6.3	Résultats . . . . .	109
5.7	Conclusion . . . . .	112
<b>Chapitre 6 Ménisque arrière - Ordre principal</b>		<b>115</b>
6.1	Ménisque avançant sur un film mince déposé . . . . .	115
6.1.1	Bourrelets de liquide . . . . .	115
6.1.2	Raccord avec le ménisque . . . . .	120
6.1.3	Limites de validité du modèle établi . . . . .	122
6.2	Ménisque avançant sur un film adsorbé . . . . .	124
6.2.1	Equation d'interface . . . . .	124
6.2.2	Conditions aux limites . . . . .	126
6.2.3	Changement de variables et étude asymptotique . . . . .	126
6.2.4	Résolution de l'équation d'interface . . . . .	130
6.3	Conclusion . . . . .	131
<b>Chapitre 7 Modélisation de la phase vapeur - Régime transitoire</b>		<b>133</b>
7.1	Thermodynamique de la phase vapeur . . . . .	133
7.2	Apport de chaleur à la phase vapeur . . . . .	136
7.3	Modification du modèle de la phase liquide . . . . .	137
7.4	Méthode de résolution . . . . .	139
7.4.1	Expressions intégrales . . . . .	139
7.4.2	Discretisation . . . . .	140
7.4.3	Déroulement du calcul . . . . .	143
7.5	Expansion d'une bulle . . . . .	144
7.5.1	Dynamique de la bulle . . . . .	145
7.5.2	Variations de température . . . . .	147

---

7.5.3 Densité de flux de chaleur imposée à la paroi . . . . .	149
<b>Conclusion</b>	<b>151</b>
<b>Annexes</b>	<b>157</b>
Annexe A Théorie cinétique des gaz	159
Annexe B Courbure locale d'une interface	169
Annexe C Etude asymptotique de l'équation de lubrification	173
Annexe D Résolution de l'équation de Laplace	175
Annexe E Modèles suivant l'ordre de perturbation	185
<b>Bibliographie</b>	<b>199</b>



# Table des figures

1.1	Schéma d'un caloduc à pompage capillaire. . . . .	8
1.2	Schémas des différents types de boucles diphasiques. . . . .	9
1.3	Schéma de fonctionnement de caloducs oscillants en boucle ouverte (a) ou fermée (b) (Kearney et Griffin [42]). . . . .	11
1.4	Domaine d'utilisation d'un PHP suivant le diamètre du tube, le flux imposé et le taux de remplissage. (Khandekar [43]). CLPHP : Closed Loop Pulsating Heat Pipe. . . . .	12
1.5	Schéma du modèle de ménisque avec un film de liquide d'épaisseur constante. (Das <i>et al.</i> [19]). . . . .	13
1.6	Schéma d'un film de liquide en déplacement [79]. Le ménisque capillaire et la ligne triple n'ont pas la même vitesse. . . . .	23
2.1	Schémas des différentes géométries de bulle considérées. . . . .	26
3.1	Découpage d'une bulle de Taylor en cinq régions de résolution : ménisque avant, transition avant, film mince, transition arrière et ménisque arrière respectivement. . . . .	43
3.2	Procédure d'obtention de l'équation d'interface pour les régions du film et de transition. Noir : équations de Navier-Stokes. Bleu : conditions aux limites. Vert : lois de fermeture. Rouge : inconnues du modèle. . . . .	55
4.1	Schéma d'un ménisque reculant et déposant un film de liquide sur la paroi. Région 1 : ménisque ; Région 2 : transition ; Région 3 : film mince. . . . .	63
4.2	Variations du coefficient $\beta_a$ en fonction de la densité de flux de chaleur imposée, pour différentes valeurs de température de saturation de la phase vapeur. Eau ( $T_{ext} = 293$ K). . . . .	66

4.3	Fonction $H(X)$ pour des paramètres quelconques, ainsi que son approximation quadratique pour des $X$ grands. . . . .	71
4.4	Evolution de la hauteur de liquide déposé en fonction du nombre d'évaporation. Points : valeurs calculées; courbe : corrélation (4.44). . . . .	75
4.5	Evolution de la longueur d'assèchement du film déposé en fonction du nombre d'évaporation. . . . .	76
4.6	Ecart entre les corrélations (4.42) et (4.46) et les valeurs numériques calculées. Eau à $T_{sat} = 350K$ . . . . .	77
4.7	Problème complet associé au champ de température $\tilde{T}$ dans le bouchon de liquide. . . . .	78
4.8	Champ de température dans le bouchon de liquide à l'ordre principal suivant $Ca^{1/3}$ et $Re$ . Eau, $\varphi_{in} = 2 \text{ kW.m}^{-2}$ et $T_{sat} = 330 \text{ K}$ . . . . .	80
4.9	Evolution radiale de la densité de flux de masse évaporée pour l'eau avec $T_{sat} = 330 \text{ K}$ . (L'effet de la température de saturation est négligeable.) . .	81
5.1	Profil de l'interface liquide-vapeur dans la région du ménisque à l'ordre 2 en $Ca^{1/3}$ pour l'eau avec $Ca = 7.10^{-4}$ et $E = 10^{-4}$ . . . . .	88
5.2	Problème dynamique dans le bouchon de liquide à l'ordre [30] permettant de déterminer le champ de vitesse à l'ordre principal dans la région du ménisque. . . . .	90
5.3	Problème dynamique dans le bouchon de liquide à l'ordre [31] permettant de déterminer le champ de vitesse au premier ordre en fonction du nombre de Reynolds. . . . .	93
5.4	Problème associé au champ de température $T_1^{[20]}$ . . . . .	94
5.5	Problème associé au champ de température $T_1^{[01]}$ . . . . .	95
5.6	Récapitulatif des résultats du modèle associé à la région du ménisque. Vert : grandeurs déjà connues. Noir : grandeurs à déterminer. . . . .	99
5.7	Variation du paramètre $B_2$ – courbure à l'infini de $H_2^{[10]}$ – pour différentes valeurs de $\delta^{[10]}$ , provenant de la résolution numérique de (5.36) ou (5.37). .	102
5.8	Correction de l'interface dans la région de transition au premier ordre en $Ca^{1/3}$ en fonction de l'abscisse $x_2$ . $E = 10^{-4}$ . . . . .	103
5.9	Correction de l'interface liquide-vapeur au premier ordre en $Ca^{1/3}$ en fonction de la l'abscisse $x_2$ . . . . .	104

---

5.10	Coefficient de correction au deuxième ordre en $Ca^{1/3}$ de la hauteur initiale de film de liquide déposé. . . . .	109
5.11	Comparaison entre les corrélations isotherme et anisotherme portant sur la hauteur adimensionnée de film déposé $\delta$ . Traits pleins : $\varphi_{in} = 5 \text{ kW.m}^{-2}$ , pointillés : $\varphi_{in} = 10 \text{ kW.m}^{-2}$ . . . . .	111
6.1	Profils d'interface de la région de transition arrière (région 4) pour différents nombres d'évaporation. $Ca = 7.10^{-4}$ . . . . .	116
6.2	Profil de la zone de transition arrière pour deux nombres d'évaporation. La courbe bleue possède une courbure positive : l'imposant bourrelet a disparu. $Ca = 7.10^{-4}$ . . . . .	117
6.3	Hauteurs minimale et maximale du bourrelet de liquide en fonction de la densité de flux imposée à la paroi. $Ca = 7.10^{-4}$ . . . . .	118
6.4	Discontinuités dans la taille des bourrelets de liquide dans le plan $(Ca, E_f)$ . La région grisée représente la plage de paramètre évaluée, pour de l'eau. . . . .	119
6.5	Coefficients $A_2$ de la forme quadratique de la zone de transition proche du ménisque arrière en fonction de la densité de flux de chaleur imposée. $Ca = 7.10^{-4}$ . . . . .	122
6.6	Rayon de courbure du ménisque arrière en fonction de la densité de flux de chaleur imposée. $Ca = 7.10^{-4}$ . . . . .	123
6.7	Racines de l'équation (6.36) pour de l'eau à différentes densités de flux de chaleur et vitesses du ménisque imposées. . . . .	128
6.8	Deux profils d'interface de la région de transition arrière se raccordant à un film adsorbé. $\varphi_{in} = 5 \text{ kW.m}^{-2}$ , $U_m = 2 \text{ cm.s}^{-1}$ . . . . .	131
7.1	Problème d'une bulle en expansion. Les régions de 1 à 3 sont le ménisque, la transition et le film de liquide déposé, respectivement. . . . .	137
7.2	Influence de la pression vapeur initiale sur la dynamique de la bulle. $\varphi_{in} = 2 \text{ kW.m}^{-2}$ . Lignes continues : $P_{v0} = 40 \text{ kPa}$ , pointillées : $P_{v0} = 60 \text{ kPa}$ . . . . .	146
7.3	Variations de température dans une bulle soumise à une densité de flux de chaleur constante. $\varphi_{in} = 2 \text{ kW.m}^{-2}$ . Lignes continues : $T_v$ , pointillées : $T_{sat}(p_v)$ . . . . .	146
7.4	Divergence entre les variations de température de la phase vapeur, et les variations de température d'équilibre. $\varphi_{in} = 2 \text{ kW.m}^{-2}$ . Lignes continues : $P_{v0} = 40 \text{ kPa}$ , pointillées : $P_{v0} = 60 \text{ kPa}$ . . . . .	147

7.5	Influence de la densité de flux de chaleur imposée sur la dynamique d'une bulle d'éthanol. Lignes continues : $P_{v0} = 40$ kPa, pointillées : $P_{v0} = 60$ kPa.	149
7.6	Influence de la densité de flux de chaleur imposée sur les variations de température dans une bulle d'éthanol. Lignes continues : $T_v$ , pointillées : $T_{sat}(p_v)$ .	149
7.7	Divergence entre les variations de température de la phase vapeur, et les variations de température d'équilibre. Lignes continues : $\varphi_{in} = 1$ kW.m <sup>-2</sup> , pointillées : $\varphi_{in} = 3$ kW.m <sup>-2</sup> .	150
A.1	Flux de masse à travers un plan	160
A.2	Flux de masse à l'interface liquide-vapeur.	162
A.3	Fonction de correction $F$ dépendant de la vitesse globale du gaz $U_0$ et du paramètre physique $\beta_0$ .	165
D.1	Problème complet associé au champ de température $T_1^{[00]}$ .	175
D.2	Problème complet associé au champ de température $\tilde{T}_{sat}$ .	177
D.3	Fonction $F$ pour la définition des valeurs propres satisfaisant le bilan de flux de chaleur à la paroi solide.	179

# Nomenclature

## Alphabet Grec

$\alpha$	Diffusivité thermique ( $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ )
$\hat{\alpha}$	Coefficient d'accommodation
$\delta$	Epaisseur de liquide au début du film déposé (m)
$\delta'$	Epaisseur de liquide à la fin du film déposé (m)
$\delta_{ij}$	Symbole de Kronecker
$\Gamma$	Flux de masse liquide adimensionné
$\Gamma^{lg}$	Densité de flux de masse évaporée adimensionnée
$\gamma$	Taux de variation de tension de surface avec la température ( $\text{N.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )
$\gamma_s$	Rapport des capacités thermiques massiques $c_{p,v}/c_{v,v}$
$\lambda$	Conductivité thermique ( $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )
$\mu$	Viscosité dynamique ( $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ )
$\nu$	Viscosité cinématique ( $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ )
$\rho$	Masse volumique ( $\text{kg.m}^{-3}$ )
$\bar{\rho}$	Rapport de masse volumique $\rho_v/\rho$
$\Delta\rho$	Différence de masse volumique $\rho - \rho_v$
$\Sigma$	Partie déviatorique du tenseur des contraintes hydrodynamiques ( $\text{N.m}^{-2}$ )
$\sigma$	Tension de surface liquide-vapeur ( $\text{N.m}^{-1}$ )
$\Phi$	Saut de pression à l'interface liquide-vapeur : $P_v - P(h(x))$ ( $\text{N.m}^{-2}$ )
$\varphi_{in}$	Densité de flux de chaleur imposée au mur ( $\text{W.m}^{-2}$ )

## Alphabet Latin

$A$	Conductance thermique d'interface adimensionnée
$\bar{A}$	Constante de dispersion. Dépendant du triplet solide-liquide-vapeur. ( $3.10^{-21}$ J pour de l'eau sur du cuivre)
$\overline{\bar{A}}$	Constante de Hamaker ( $6\pi\bar{A}$ )
$a$	Conductance d'interface en température ( $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )
$B$	Conductance d'interface en pression adimensionnée
$b$	Conductance d'interface en pression ( $\text{s.m}^{-1}$ )
$c$	Courbure de l'interface liquide-vapeur ( $\text{m}^{-1}$ )
$c_p$	Capacité thermique massique de la paroi du capillaire ( $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )
$c_{p,v}$	Capacité thermique massique à pression constante ( $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )
$c_{v,v}$	Capacité thermique massique à volume constante ( $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )
$d$	Epaisseur de la paroi du capillaire (m)



$F$	Facteur correctif du flux de masse condensée (-)
$G$	Flux de masse liquide ( $\text{kg.s}^{-1}$ )
$G^{lg}$	Flux de masse évaporée ( $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ )
$H$	Coefficient de transfert en convection naturelle avec l'extérieur ( $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ )
$h$	Position de l'interface liquide-vapeur ( $m$ )
$h_{lg}$	Chaleur latente de vaporisation ( $\text{J.kg}^{-1}$ )
$i$	Unité imaginaire. $i^2 = -1$
$K_{dim}$	Résistance thermique de l'interface ( $\text{K.m}^2.\text{s.kg}^{-1}$ )
$K$	Résistance thermique de l'interface adimensionnée (-)
$M_g$	Masse molaire ( $\text{kg.mol}^{-1}$ )
$M_v$	Masse vapeur ( $\text{kg}$ )
$\dot{m}$	Densité de flux de masse à travers une surface (cf. indice) ( $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ )
$\dot{q}_0$	Source de chaleur volumique ( $\text{W.m}^{-3}$ )
$R$	Rayon du capillaire ( $m$ )
$R_1$	Rayon du ménisque avant à l'ordre principal ( $m$ )
$R_g$	Constante des gaz parfaits ( $8.314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )
$R_s$	Constante spécifique des gaz parfaits ( $R_g/M_g$ )
$R_I$	Rayon de courbure dans la première direction principale ( $\text{m}^{-1}$ )
$R_{II}$	Rayon de courbure dans la deuxième direction principale ( $\text{m}^{-1}$ )
$U_m$	Vitesse de la bulle de vapeur ( $\text{m.s}^{-1}$ )
$V_v$	Volume de la bulle de vapeur ( $\text{m}^3$ )

### Nombres adimensionnés

$Bi$	Nombre de Biot ( $H R/\lambda$ )
$Bi_m$	Nombre de Biot modifié ( $Bi Ca^{2/3}$ )
$Bo$	Nombre de Bond ( $\Delta\rho g R^2/\sigma$ )
$Ca$	Nombre Capillaire ( $U_m \mu/\sigma$ )
$E$	Nombre d'évaporation ( $\varphi_{in}/h_{lg} \rho U_m$ )
$Ma$	Nombre de Marangoni ( $-\gamma R \Delta T/\mu \alpha$ )
$Pr$	Nombre de Prandtl ( $\nu/\alpha$ )
$Re$	Nombre de Reynolds ( $U_m R/\nu$ )

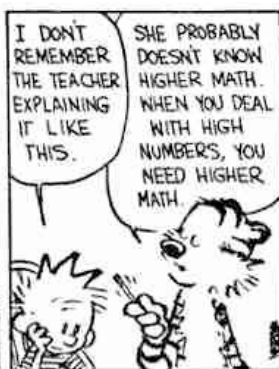
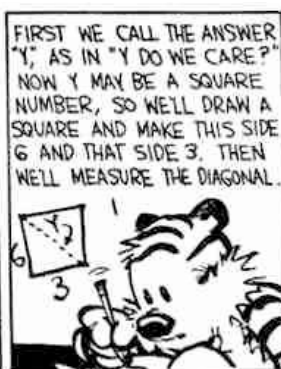
### Indices

+	Molécules possédant une vitesse positive
-	Molécules possédant une vitesse négative
0	Gaz à quelques <i>libres parcours moyens</i> de l'interface liquide-vapeur
1	Région du ménisque avant
2	Région de transition avant
3	Région du film mince
4	Région de transition arrière
5	Région du ménisque arrière
$c$	Grandeur condensée
$d$	Film adsorbé, lié aux forces de dispersion
$d_t$	Dérivée temporelle
$e$	Grandeur évaporée

---

$i$	Région courante. Précisée par le contexte.
$int$	À l'interface
$l$	Phase liquide
$n$	Dérivée suivant la normale à l'interface
$r^i$	Dérivée i-ième dans la direction radiale
$s$	Interface liquide-vapeur
$sat$	Grandeur à saturation
$v$	Phase vapeur
$x^i$	Dérivée i-ième dans la direction axiale







# Présentation générale

De la cuisson des pâtes à la flûte de champagne, en passant par les bulles de savons soufflées par les enfants, les bulles de vapeur ont de tout temps fait partie de l'expérience quotidienne de l'humanité. Et pourtant, comprendre leur comportement n'est pas une mince affaire, et soulève encore aujourd'hui des problèmes théoriques difficiles à appréhender et à résoudre. En un temps où le développement des sciences est devenu le but ultime de l'humanité, où les grands scientifiques sont portés en triomphe comme les saints du Moyen-Âge, où notre compréhension de l'univers est chaque jour plus grande, une simple bulle se déplaçant dans un tube de quelques millimètres de diamètre est encore un casse-tête pour les chercheurs.

Quelles sont les raisons de ces difficultés ? La première est sans doute, pendant longtemps, un manque d'intérêt de la part des scientifiques. La mécanique dite classique de Newton, la thermodynamique et l'électromagnétisme, ou encore plus récemment la physique des particules, ont eu un impact plus immédiat sur la vie quotidienne des gens. L'astrophysique et l'origine de l'univers ont sans doute, quant à elles, plus de charme qu'une simple bulle de vapeur.

Mais les progrès scientifiques récents, en particulier dans le domaine de l'électronique et du transport, entraînent aujourd'hui des problèmes importants de gestion thermique. Des composants électroniques toujours plus petits et plus puissants génèrent des densités de flux de chaleur toujours plus grandes. Il faut évacuer cette chaleur efficacement, sous peine de voir la durée de vie des systèmes informatiques se réduire drastiquement. Le problème posé aujourd'hui à l'industrie du transport est de réduire les coûts, la maintenance et la pollution des voitures, avions et autres satellites. Or, il s'avère que la gestion thermique de ces différents systèmes est la clé de tous leurs problèmes. Il s'avère aussi qu'un moyen de gestion thermique peu coûteux et efficace est l'utilisation du transfert diphasique.

Le transfert diphasique tire ici son nom de la coexistence des phases liquide et vapeur d'un même fluide, entre lesquelles prennent place de l'évaporation et de la condensation, selon le chargement thermique local appliqué. Ce type de transfert est peu coûteux, car il ne nécessite pas de cycle mécanique comme les machines frigorifiques classiques. Il est de plus efficace car, si le système est fermé, la pression dans la phase vapeur détermine la température de travail, et les variations de température autour de cette dernière restent faibles.

Deux phases, liquide et vapeur, en relation l’une avec l’autre par évaporation et condensation. Notre bulle devient décidément de plus en plus intéressante à regarder de près.

Le transfert par ébullition, et l’intérêt de la chaleur latente de vaporisation pour “consommer” une grande quantité d’énergie avec des différences de température limitées, est connu depuis déjà longtemps, mais quasiment exclusivement de manière empirique et globale (voir par exemple Nukiyama [61], traduction de l’article original de 1934 en japonais). Le développement important, depuis cinquante ans, de systèmes thermiques passifs utilisant le transfert diphasique et répondant aux problématiques industrielles exposées plus haut, a poussé les chercheurs à s’intéresser un peu plus précisément aux mécanismes physiques contrôlant la génération, la croissance et le mouvement des bulles de vapeur, soumises ou non à un chargement thermique.

À ce moment, une deuxième raison aux difficultés rencontrées par les chercheurs pour comprendre la dynamique d’une bulle s’est faite jour. Un grand nombre de paramètres influence le comportement d’une bulle, spécialement si celle-ci est chauffée. Les transferts de chaleur s’effectuent sur une grande plage de longueurs caractéristiques, allant du millimètre au nanomètre. Cela implique des physiques très différentes à prendre en compte, et des couplages complexes entre ces différentes physiques, se produisant notamment sur une interface liquide-vapeur, libre de surcroît.

L’ambition de ce mémoire est de fournir des informations, les plus précises possible, aux chercheurs voulant modéliser d’un point de vue système le fonctionnement d’un caloduc oscillant. Ce type particulier de caloduc (du latin *calor ducere*, conduire la chaleur) utilise l’oscillation de bulles de vapeur entre une source chaude et une source froide pour transférer la chaleur de l’une à l’autre. La modélisation des caloducs oscillants présente aujourd’hui un enjeu important pour en développer l’utilisation industrielle. Entre autre, la connaissance des paramètres importants influençant localement le mouvement d’une bulle de vapeur est indispensable pour dimensionner correctement ces systèmes thermiques.

Les mécanismes physiques mis en jeu lors du fonctionnement de ces systèmes sont nombreux, fortement co-dépendants et, pour ne rien arranger, hautement instationnaires. A l’heure actuelle cette modélisation est encore embryonnaire, il est donc important de procéder par étapes, en commençant par résoudre un modèle relativement simple qui pourra ensuite être enrichi et complété pour obtenir une représentation plus fidèle encore du fonctionnement d’un caloduc oscillant.

Ce modèle relativement simple (au vu des phénomènes physiques restant à prendre en compte) est celui d’une bulle en translation uniforme, chauffée par une densité de flux de chaleur constante. Dans la majeure partie du mémoire, la phase vapeur ne sera considérée qu’à travers sa température de saturation, ce qui permettra une étude précise de la dynamique et des transferts thermiques dans la phase liquide entourant la bulle.

La première partie du mémoire est consacrée à la présentation du panorama de la modélisation d’un caloduc, d’une bulle, ou d’un film de liquide possédant une interface

---

libre (chapitre 1), à l'élaboration du modèle de la phase liquide (chapitre 2), puis à la présentation de la procédure de résolution de ce modèle (chapitre 3).

La deuxième partie regroupe quant à elle les résultats obtenus par cette résolution. La bulle sera séparée en deux grandes régions : l'avant et l'arrière de la bulle.

La partie avant comprend le ménisque à l'avant de la bulle, ainsi que le film de liquide qu'il dépose à la paroi. Le chapitre 4 analyse cette région à l'aide d'un modèle simplifié, tandis que le chapitre 5 complète ce modèle et va plus loin dans la description d'un ménisque chauffé déposant un film mince.

La résolution du modèle associé à la région arrière de la bulle est séparé en deux cas de figure. Soit le ménisque arrière remouille un film de liquide d'épaisseur micrométrique (section 6.1), soit ce film de liquide est déjà complètement évaporé quand le ménisque arrière arrive, et il est alors considéré que le ménisque arrière "remouille" un film adsorbé (section 6.2).

Enfin, les résultats des chapitres précédents sont utilisés pour établir un modèle thermodynamique transitoire de la phase vapeur (chapitre 7). Ce modèle prend en compte l'augmentation de la masse de la bulle, due à l'évaporation du film de liquide, ainsi que la résistance au mouvement des bouchons de liquide entourant la bulle, et en déduit les variations de volume, de pression et de température de la bulle.





# Partie I

## Élaboration du modèle



# Chapitre 1

## Du caloduc oscillant à la bulle

### 1.1 Généralités sur les caloducs

L'appellation *caloduc*, devenue générique, peut désigner en réalité un grand nombre de systèmes de transfert de chaleur faisant appel au changement de phase liquide-vapeur. Citons en particulier les thermosiphons, les caloducs à pompage capillaire, les caloducs tournants, les boucles diphasiques ou encore, plus récemment, les caloducs oscillants.

Les caloducs sont des systèmes thermiques permettant de transférer la chaleur d'une source chaude à une source froide en utilisant principalement la chaleur latente de changement de phase du fluide de travail. Ce fluide est contenu sous forme diphasique dans un tube hermétique, généralement de faible section. Le terme *diphasique* désigne la présence dans un même système d'un fluide simultanément sous les formes liquide et vapeur.

Si l'herméticité du système est bien respectée, et sauf désarmoçage, cette température du fluide de travail ne peut varier que faiblement même sous de forts flux de chaleur. Cette particularité du fonctionnement des caloducs constitue un premier intérêt de ces systèmes diphasiques, puisque la gestion en température entre les sources chaude et froide est effectuée rigoureusement, quasiment sans inertie thermique et en général sans aucun contrôle extérieur, notamment électronique.

Le cycle de fonctionnement typique d'un caloduc est le suivant : le fluide sous forme liquide s'évapore d'abord dans la source chaude, appelée *évaporateur*. L'excès de vapeur créée dans cette zone augmente localement la pression, et s'écoule donc naturellement vers la source froide à l'autre bout du tube où elle se condense, d'où le nom *condenseur* donné à la source froide. Finalement, tout le problème dans ces systèmes est de conduire le liquide du condenseur à l'évaporateur pour boucler le cycle de fonctionnement. La solution évidente est la gravité, en plaçant le condenseur au dessus de l'évaporateur. Mais cette solution reste très restrictive, en particulier pour les applications spatiales.

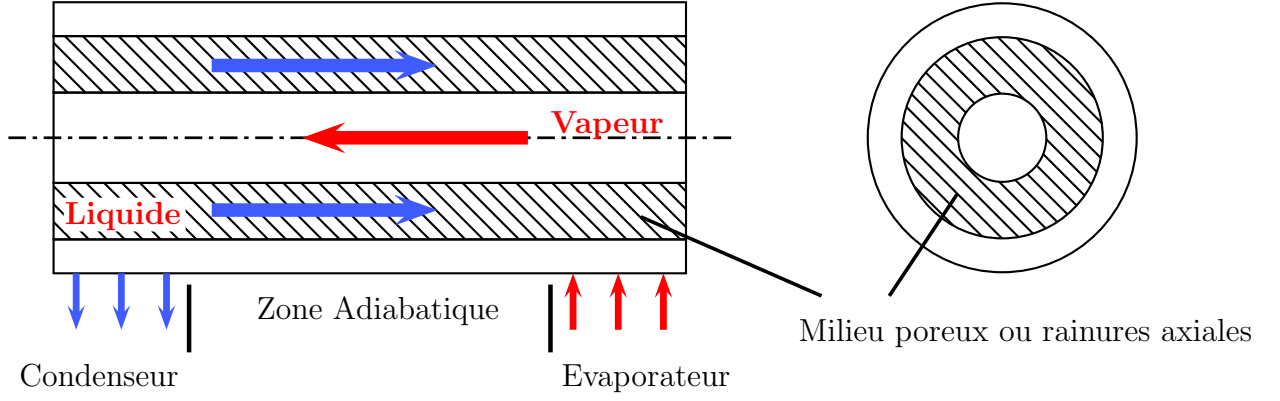


Figure 1.1: Schéma d'un caloduc à pompage capillaire.

Or c'est l'industrie spatiale qui a été historiquement le catalyseur du développement de ces systèmes, dépourvus de toute pièce mécanique et transférant une quantité de chaleur importante pour des variations de température faibles, pour d'évidentes raisons de maintenance, inexistante si le caloduc est correctement scellé.

La solution autre que gravitaire la plus largement utilisée, initiée au début des années 1960 par Grover [28, 29], est le pompage capillaire représenté sur la figure 1.1. Un milieu poreux est introduit ou des rainures axiales sont usinées sur les parois du caloduc, permettant de drainer le liquide vers l'évaporateur grâce à la différence de pression entre les phases liquide et vapeur, induite par la courbure de l'interface liquide-vapeur, dont le rayon de courbure est de la taille des pores, ou de la largeur des rainures. Cette différence de pression peut être modélisée par la loi de Young-Laplace.

$$\Delta P = P_v - P_l = \sigma \left( \frac{1}{R_I} + \frac{1}{R_{II}} \right) \quad (1.1)$$

Les grandeurs  $R_I$  et  $R_{II}$  représentent les rayons de courbure de l'interface dans les deux directions principales de l'espace. Le coefficient  $\sigma$  est quant à lui la *tension de surface*, liée au fluide de travail et fonction de la température de travail. La tension de surface quantifie le déséquilibre des interactions moléculaires à l'interface entre les deux phases fluides.

Plusieurs phénomènes physiques ont tendance à limiter la puissance maximale transférable suivant la température de la vapeur dans le système. Pour les caloducs à pompage capillaire, la plus importante est la limite capillaire, la différence de pression générée par la courbure de l'interface n'est alors plus suffisante pour compenser les pertes de charge liées à l'écoulement du fluide dans le système. Ces pertes de charge peuvent en effet devenir rapidement importantes, puisque les phases liquide et vapeur se déplacent en sens opposé dans le même tube. Ces sens de déplacement opposés engendrent une autre limitation aux capacités de transfert de cette configuration de caloduc, à savoir la limite

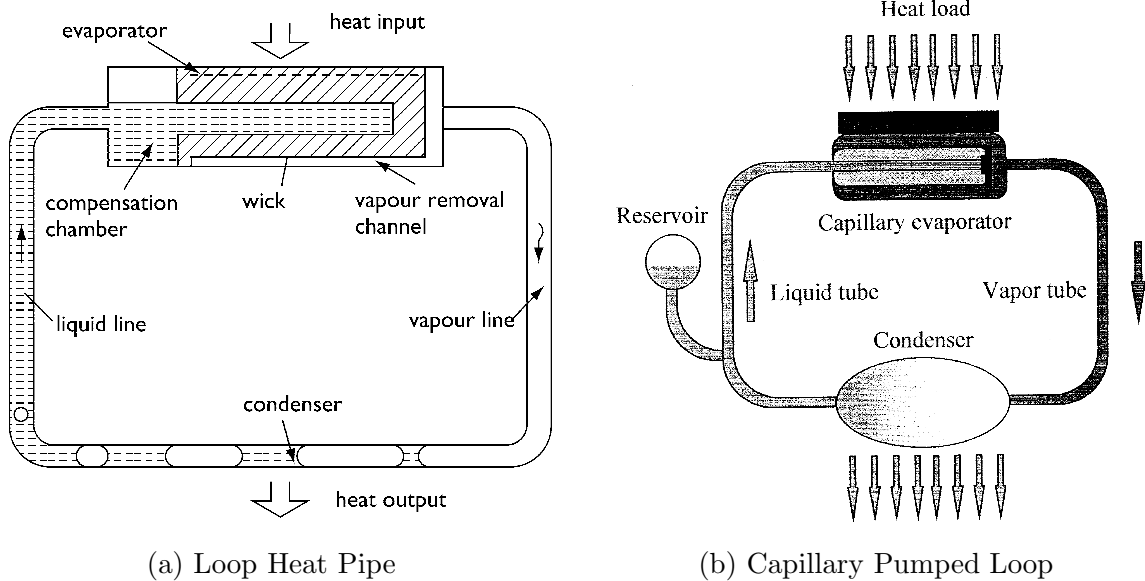


Figure 1.2: Schémas des différents types de boucles diphasiques.

d'entraînement. Pour des chargements thermiques trop importants, la vitesse de la phase vapeur est tellement importante qu'elle fait rebrousser chemin au liquide ou arrache des gouttelettes pour les déposer vers le condenseur. De plus, il existe dans ces systèmes des limites hautes et basses de température de fonctionnement. Aux faibles températures, la différence de pression entre les sources chaude et froide n'est pas assez importante pour pouvoir engendrer un écoulement de la vapeur. C'est la limite dite visqueuse, pouvant être peu contraignante suivant les fluides, car opérant près du point triple. En revanche, si la température de fonctionnement est trop élevée, une ébullition nucléée peut se déclencher et rompre le retour du liquide, entraînant alors un assèchement partiel voire total de la zone évaporateur.

Pour repousser au maximum la limite capillaire, de loin la limitation la plus importante aux possibilités de transfert d'un caloduc à pompage capillaire, Russes et Américains, en concurrence pour le développement spatial, ont imaginé parallèlement deux technologies très similaires dans les années 1970 et 1980 : séparer les lignes de liquide et de vapeur. L'objectif était d'abaisser fortement les pertes de charge du système, et de pouvoir ainsi transférer plus de chaleur sur de plus longues distances. Un milieu poreux est cependant toujours indispensable pour pomper le liquide dans l'évaporateur. Ces systèmes sont appelés *boucles diphasiques*, et sont schématisés dans la figure 1.2. L'ajout d'un réservoir diphasique contrôlé en température, indispensable pour travailler sur des plages de flux de chaleur importantes, permet de plus de fixer la température de saturation du système, et donc la position du cycle de fonctionnement sur le diagramme de phase ( $P, T$ ). La différence majeure entre boucles russes et américaines est la position de ce réservoir [40, 76]. Dans la boucle russe, nommée *Loop Heat Pipe* ou LHP, le réservoir est accolé à l'évaporateur, ce qui permet d'assurer le démarrage, puisque le milieu poreux ne pourra pas s'assécher. La boucle américaine, appelée *Capillary Pumped Loop* (CPL), place le

réservoir sur la ligne liquide, ce qui présente l'avantage d'une fabrication simple, mais un démarrage plus difficile à assurer suivant les conditions d'utilisation. La comparaison des performances, avantages et inconvénients de chaque technologie a été effectuée par Nikitkin et Cullimore [58] en 1998.

D'autres moyens que le pompage capillaire ou la gravité existent pour conduire le liquide du condenseur vers l'évaporateur. La force appliquée à la phase liquide peut être d'origine centrifuge (caloduc tournant,[15]), électro-cinétique (caloduc électro-hydrodynamique), magnétique (caloduc magnéto-hydro-dynamique), etc. Leur utilisation dans des systèmes industriels reste néanmoins relativement peu développée à cette date, mis à part les caloducs tournants utilisés dans le refroidissement des rotors de moteurs électriques [65, 81].

Si le caloduc est longtemps resté une technologie d'application spatiale, l'industrie terrestre s'y intéresse de plus en plus. La plupart des systèmes électroniques ou informatiques possèdent aujourd'hui leurs caloducs à pompage capillaire, et le transport terrestre s'intéresse au développement des boucles diphasiques pour refroidir l'électronique de puissance embarquée, les batteries, les alternateurs, etc.

La modélisation et le dimensionnement des caloducs à pompage capillaire et des boucles diphasiques sont aujourd'hui relativement bien maîtrisés. Pour approfondir cette question, l'ouvrage *Heat Pipes : Theory, Design and Applications* par Reay, Kew et McGlen [68] est un des plus complets sur les technologies des caloducs.

## 1.2 Caloducs oscillants - Intérêt et performance

Au début des années 1990, un nouveau type de caloduc a été décrit par Akachi [2, 3, 4] dans plusieurs brevets. Il s'agit d'un tube capillaire lisse faisant des allers-retours entre l'évaporateur et le condenseur, partiellement rempli par le fluide de travail, comme un caloduc classique. Le *tube capillaire* est ainsi appelé car il présente un diamètre inférieur à la *longueur capillaire*, qui est elle-même définie comme la longueur à laquelle les forces capillaires sont du même ordre de grandeur que l'effet de la gravité. Elle s'exprime à partir du *nombre de Bond*,  $Bo$ , qui est lui-même le rapport entre les forces gravitaires et capillaires. Ce nombre est égal à 1 pour des longueurs caractéristiques égales à la longueur capillaire, exprimée par :

$$l_{cap} = \left( \frac{\sigma}{\rho g} \right)^{1/2} \quad (1.2)$$

Pour de l'eau, cette longueur capillaire est typiquement de l'ordre du millimètre. Au-dessous de cette longueur, la capillarité étant prépondérante par rapport à la gravité, une bulle de vapeur ou une goutte de liquide prend préférentiellement une forme sphérique.

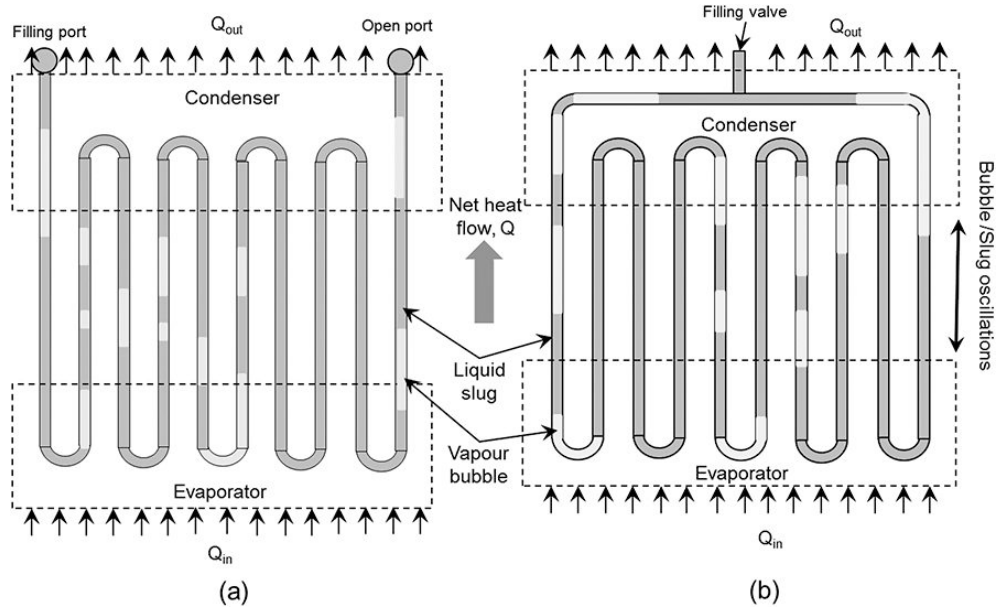


Figure 1.3: Schéma de fonctionnement de caloducs oscillants en boucle ouverte (a) ou fermée (b) (Kearney et Griffin [42]).

Du fait de l'absence de milieu poreux, ainsi que des dimensions capillaires du tube, ce fluide se répartit naturellement sous forme de bulles de vapeur séparées entre elles par des bouchons de liquide, comme représentés sur la figure 1.3. En imposant un flux de chaleur à l'évaporateur, les différences de pression entre bulles adjacentes différentiellement chauffées entraînent une instabilité dynamique de ces bulles et donc le déplacement de l'ensemble bulle vapeur/bouchon liquide, qui peut éventuellement passer de l'évaporateur au condenseur. Le bouclage du tube entre les deux sources permet de propager les instabilités, et plus le nombre d'aller-retour est important, plus le caloduc semble performant. Puisque le transfert de chaleur s'effectue grâce à l'oscillation de bulles de vapeur, ce type particulier de système thermique est appelé *caloduc oscillant*, en anglais *Pulsating Heat Pipe* (PHP) ou *Oscillating Heat Pipe* (OHP).

Deux types de transfert thermique sont présents dans ce système. Un transfert de chaleur sensible par convection forcée est assuré par les bouchons de liquide passant d'une source à l'autre. S'y ajoute un transfert de chaleur latente, grâce aux films de liquide entre les parois du capillaire et les bulles de vapeur. Puisque les deux phases, liquide et vapeur, se déplacent dans la même direction et qu'un milieu poreux n'est pas nécessaire, les limites capillaire et d'entraînement sont largement améliorées, voire évitées, par rapport à un caloduc à pompage capillaire. Un avantage supplémentaire des caloducs oscillants sur les autres systèmes diphasiques est sa grande facilité de fabrication et d'intégration ; ils peuvent s'adapter en pratique à quasiment n'importe quelle configuration rencontrée dans l'industrie.

Lors de sa thèse préparée à l'université de Stuttgart et soutenue en 2004, Khandekar [43] a étudié les performances thermiques des PHPs suivant de nombreux paramètres



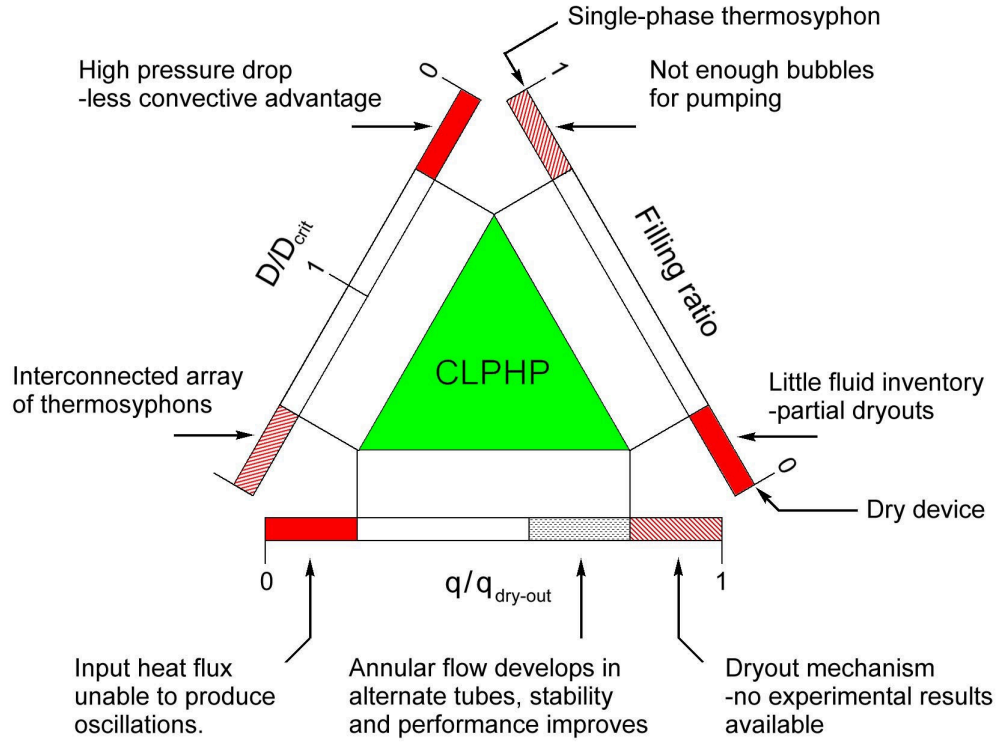


Figure 1.4: Domaine d'utilisation d'un PHP suivant le diamètre du tube, le flux imposé et le taux de remplissage. (Khandekar [43]). CLPHP : Closed Loop Pulsating Heat Pipe.

comme le diamètre des tubes, le nombre d'allers-retours, le fluide de travail, le flux imposé, le taux de remplissage ou l'influence de la gravité. Il a ainsi mis en évidence que les performances des caloducs oscillants étaient meilleures pour des diamètres inférieurs à un diamètre critique de l'ordre de la longueur capillaire. Une des explications est la hauteur de film déposé à la paroi par le bouchon liquide qui devient faible pour des diamètres capillaires, augmentant donc le flux de chaleur transféré par évaporation et de là l'instabilité des bulles, très importante pour l'efficacité de ces systèmes. Il a aussi été montré que la résistance thermique globale d'un PHP pouvait diminuer drastiquement avec l'augmentation du flux de chaleur imposé. Ces résultats sont en partie résumés par la figure 1.4.

De nombreuses études sont depuis venues compléter ces résultats, concernant le fluide de travail, les couplages entre orientation, taux de remplissage et gravité [50, 51, 6], ainsi que la compréhension plus fine des liens très forts entre transfert thermique et hydrodynamique des écoulements liquide et vapeur dans un PHP [54, 82].

Suivant le flux de chaleur imposé à l'évaporateur, plusieurs régimes d'écoulement ont été mis en évidence lors du fonctionnement d'un PHP [43, 47]. Si le diamètre du tube est de l'ordre de la longueur capillaire, le fluide en oscillation est composé dans un premier temps de bulles de vapeur de petite taille. En augmentant le flux de chaleur imposé, de nouvelles bulles se forment par nucléation, séparant éventuellement les bouchons liquides. Du fait de la grande agitation des bulles, celles-ci peuvent se rompre ou coalescer pour

finale-ment former de longues bulles couramment connues sous le nom de *bulle de Taylor*. A partir d'un certain niveau de chauffage, les mouvements sont tellement importants que l'hydrodynamique de la phase vapeur devient prépondérante devant celle de la phase liquide, et un écoulement annulaire se met en place avec un comportement très similaire à celui d'un thermosiphon. Puisqu'un caloduc oscillant typique est constitué d'un grand nombre de tours, ces différents régimes peuvent coexister dans des branches voisines. Il est aussi intéressant de remarquer qu'en situation gravitaire, le régime annulaire à flux de chaleur élevé conduit à une résistance thermique plus faible encore que le régime à bulles de Taylor. Cependant, pour des applications spatiales, le comportement de type thermosiphon en régime annulaire aura sans doute du mal à être efficace en l'absence de gravité. Quoi qu'il en soit le sujet très vaste de la caractérisation expérimentale des caloducs oscillants reste un travail en cours, avec encore un grand nombre de géométries et de conditions externes et internes à explorer.

### 1.3 Modélisation des caloducs oscillants

Parallèlement aux études expérimentales réalisées sur les caloducs oscillants, des efforts de modélisation ont été effectués depuis une quinzaine d'années, en vue d'atteindre une compréhension globale des phénomènes influençant la thermodynamique des oscillations de bulles dans un PHP, d'obtenir des critères de démarrage et des limites de fonctionnement permettant une industrialisation plus systématique de ce système thermique. Une des premières modélisations est due à Shafii *et al.* [75] en 2001, pour laquelle les interfaces entre bulles de vapeur et bouchons de liquide sont modélisées par des surfaces planes, négligeant entièrement les films de liquide déposés à la paroi, dans une configuration masse-ressort pure. Par la suite, Zhang et Faghri [89] ont ajouté à ce modèle l'influence de la chaleur latente en prenant en compte le flux d'évaporation à cette interface qui, malgré tout, restait plane. Bien que limitée, cette modélisation a cependant permis de montrer qu'à cause du faible diamètre du tube capillaire, afin que le nombre de Bond

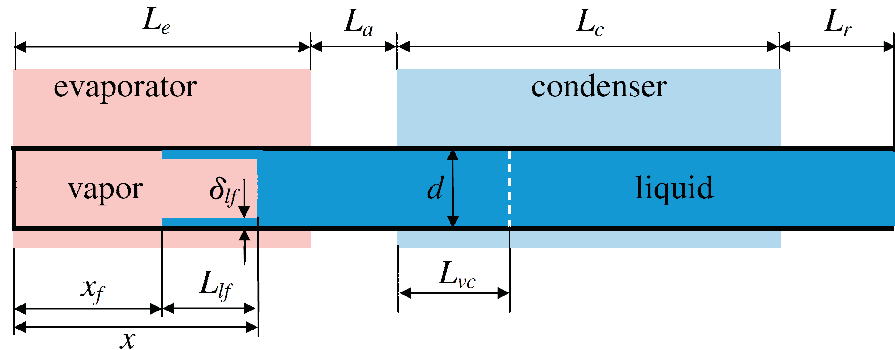


Figure 1.5: Schéma du modèle de ménisque avec un film de liquide d'épaisseur constante. (Das *et al.* [19]).

associé au fluide soit suffisamment faible, l'influence de la gravité est négligeable sur une branche seule. Elle a aussi conclu que la majorité du transfert thermique s'effectuant entre l'évaporateur et le condenseur est principalement due à la chaleur sensible advectée par les bouchons de liquide, et que l'énergie latente s'échangeant dans le film de liquide ne servait qu'à soutenir les oscillations en se transformant en énergie cinétique. Cependant cette dernière conclusion n'a toujours pas été affirmée par des études récentes, expérimentales ou théoriques.

La prise en compte des films déposés a commencé à être envisagée avec Dobson [21], qui a étudié l'oscillation de ménisques plats, comme Shaffi, mais avec des films déposés de hauteur constante et de longueur variable aux interfaces desquels s'effectuent les transferts de chaleur latente. La figure 1.5 schématise un ménisque suivant ce modèle. Sur ce modèle sont aussi basés quelques autres travaux (voir par exemple [60] et [19]), qui ont permis une meilleure compréhension de la thermodynamique d'un ménisque en oscillation, ainsi qu'un réseau de bulles en oscillation.

Cependant, Khandekar écrivait en 2010 dans sa synthèse sur l'hydrodynamique des PHPs [44] :

*“ There is no comprehensive mathematical model to predict the PHP thermal performance for a given boundary condition. The understanding of heat transfer and pressure drop under self-excited thermally driven oscillating two-phase flow inside capillary tubes is not convincing. The complete transport phenomena in the unit-cell need to be resolved to predict global heat transfer parameters.”*

Et Nikolayev [59] ajoutait en 2012 :

*“ Too little information is available on the dynamic and shape variation of the wetting film in the evaporator.”*

Au delà de ces difficultés à modéliser précisément et simplement l'hydrodynamique d'une bulle se déplaçant dans un capillaire chauffé, problème déjà difficile en soi, existent des facteurs aggravants pour qui veut accéder aux performances thermiques d'un caloduc oscillant autrement que par une caractérisation expérimentale : le mouvement d'une bulle dans ce système est fortement influencé par les bulles voisines, pouvant s'assimiler à un système masse-ressort, mais influencé par quantité de phénomènes physiques, en particulier l'évaporation du film de liquide déposé. En allant plus loin, il faudrait aussi prendre en compte la coalescence et la rupture de bulles, la création de bulles de vapeur par nucléation à la paroi, tout ceci dans un système hydrodynamique hautement instationnaire, où les différentes branches composant le caloduc peuvent simultanément présenter des régimes différents.

La modélisation numérique et théorique des caloducs oscillants a commencé il n'y a qu'une quinzaine d'années. Il est donc normal qu'à ce stade du développement, les difficultés qui restent encore à surmonter par les chercheurs semblent démesurées. Cependant les progrès déjà effectués dans la compréhension de la thermodynamique des bulles, ainsi que la communauté de plus en plus importante s'intéressant à ces sujets laissent à penser qu'au fur et à mesure de l'avancée des travaux et de la prise en compte progressive des mécanismes physiques importants, une modélisation satisfaisante des PHPs pourra être menée à bien à moyen terme, rendant possible une industrialisation plus large de ce système thermique.

L'objectif principal de ce mémoire est d'aider à répondre aux demandes de Khandekar et Nikolayev exprimées plus haut, et de compléter les connaissances déjà disponibles sur la thermodynamique d'une bulle dans un capillaire chauffé, en laissant pour l'instant de côté les interactions et générations de bulles. Pour cela, il est d'abord nécessaire de dresser un panorama des travaux de modélisation déjà effectués, sur le sujet des films de liquide, ou des bulles complètes, dans un contexte isotherme ou non.

## 1.4 Film de liquide

La modélisation d'une bulle se déplaçant dans l'évaporateur d'un caloduc oscillant nécessite la compréhension des phénomènes physiques influençant le comportement dynamique et thermique du film de liquide présent entre la paroi solide du capillaire et la bulle de vapeur. Ce film influence évidemment la densité de flux de masse évaporée. Sa dynamique particulière, notamment quand il s'assèche, influence aussi le mouvement de la bulle dans son ensemble. Plusieurs longueurs caractéristiques de film de liquide, liées à des mécanismes physiques particuliers, peuvent être définies, et aboutissent à des comportements thermique et dynamique très différents.

Dans des films d'épaisseur micrométrique, c'est la viscosité qui pilote la dynamique du film. Si la hauteur de liquide se réduit jusqu'à quelques centaines de nanomètres, les forces de Van der Waals prennent le dessus et définissent ce qu'on appelle un *film adsorbé*. Enfin, une densité de flux de chaleur imposée à un film micrométrique entraîne son assèchement, et donc la création d'une *ligne triple*, laquelle possède une dynamique propre qu'il est indispensable de connaître.

### 1.4.1 Hypothèses de lubrification

Intéressons-nous tout d'abord à un film d'épaisseur micrométrique. Il est supposé ici que le nombre de Reynolds est faible devant 1, et donc que l'équation de bilan hydrodynamique se réduit à l'équation de Stokes. Cette hypothèse de faibles effets inertiels dans le film est justifiée par la prédominance des effets visqueux dans un liquide possédant

seulement quelques micromètres d'épaisseur.

Pour pouvoir simplifier fortement les équations de Stokes, l'épaisseur du film de liquide (notée  $\delta$  par la suite) est supposée très faible devant la distance caractéristique longitudinale  $L$ . Le rapport de ces deux longueurs ( $\varepsilon = \delta/L$ ) peut être vu comme un paramètre de perturbation très pertinent, puisqu'il est petit devant 1.

Quand un modèle en particulier est trop compliqué pour pouvoir être résolu en l'état, il est possible de le simplifier en exprimant toutes ses inconnues ( $Z$ ) comme des séries de Taylor suivant un paramètre du modèle, qui est alors appelé *paramètre de perturbation*.

$$Z = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} \left. \frac{dZ}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \quad (1.3)$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro, ne subsisteront dans le modèle que les termes non facteurs de ce paramètre, ce qui peut le simplifier fortement et le rendre soluble analytiquement. Cette solution est cependant une solution approchée, dite à *l'ordre principal*. Une solution plus précise peut être obtenue en prenant en compte les termes suivant dans la série de Taylor. En soit, n'importe quel paramètre du problème peut être utilisé comme paramètre de perturbation. Cependant, la solution à l'ordre principal est d'autant plus précise que ce paramètre est petit devant un, car cela indique que les termes simplifiés dans le modèle sont effectivement d'importance très inférieure à ceux qui sont pris en compte.

C'est en cela que le rapport des longueurs caractéristiques transversale et longitudinale  $\delta/L$  du film de liquide est un paramètre de perturbation pertinent pour simplifier l'équation de Stokes qui s'écrit alors, à l'ordre principal :

$$\partial_x P = \nu \partial_{r^2} U \quad (1.4a)$$

$$\partial_r P = 0 \quad (1.4b)$$

Les grandeurs  $P$  et  $U$  représentent respectivement le champ de pression, et la projection longitudinale du champ de vitesse.

L'expression de la courbure de l'interface dérivée dans l'annexe B impose une deuxième hypothèse sur le film de liquide nécessaire pour la validité du développement. Il est indispensable en effet de supposer que les variations de hauteur de ce film sont faibles,  $d_x \delta \ll 1$ .

Dans le cadre de ces hypothèses, dites de lubrification, les instabilités créées par une différence de température entre la paroi solide et la surface libre du film de liquide sont surtout d'origine thermocapillaire. Il a été précisé plus tôt que la tension de surface associée à la surface libre du film est fonction de la température. Des variations longitudinales

de température, même faibles, engendrent alors un gradient longitudinal de tension de surface, et donc des variations de pression à l'interface liquide-vapeur, pouvant générer à leur tour un écoulement cellulaire, appelé thermocapillarité ou *effet Marangoni*. Ce phénomène est à distinguer des instabilités de Rayleigh-Bénard, où la circulation cellulaire découle d'un gradient de flottabilité. Un critère pour distinguer ces deux types d'écoulement a été donné par Scriven et Sternling [73].

Un certain nombre d'études théoriques sur les instabilités thermocapillaires, utilisant les hypothèses de lubrification, a été publié depuis, en particulier par Sen et Davis [74] et Smith et Davis [77]. Burelbach *et al.* [13] ont ajouté à ce modèle la prise en compte des phénomènes d'évaporation/condensation à l'interface libre du film.

L'hypothèse d'une variation faible de la hauteur de liquide est cependant contraignante pour qui veut étudier des films d'étendus fins, comme dans le cas de l'étalement d'une goutte ou de l'assèchement d'un film de liquide. La théorie de la lubrification a été étendue par Snoeijer [80] à des films de faibles épaisseurs mais de fortes pentes. La relaxation de l'hypothèse de faibles pente a été effectuée en considérant, plutôt que la hauteur  $\delta$  du film, l'angle  $\theta$  formé par la paroi solide et la tangente à l'interface libre. En calculant l'expression du champ de vitesse dans ce coin théorique d'angle  $\theta$ , il est possible de trouver une équation paramétrisant la position de l'interface liquide-vapeur très proche de l'équation dérivée de la lubrification.

Dans le cadre de ce mémoire, les hypothèses de lubrification seront rencontrées uniquement pour dimensionner les grandeurs caractéristiques du modèle, et ne rentreront en aucune manière dans le modèle en soi. Ceci assure la généralité des résultats de notre modèle vis-à-vis de ces hypothèses.

### 1.4.2 Film adsorbé

Quand une surface solide est mouillée et que le liquide présent s'évapore ou se déplace, il reste toujours sur la paroi un film de liquide de quelques nanomètres d'épaisseur, appelé *film adsorbé*. La présence de ce film adsorbé est dû aux interactions moléculaire fortes entre deux milieux de constitution chimiques différentes, dites interactions de Van der Waals. Ces forces sont d'importance très grande quand les phases solide et vapeur sont proches, et « piègent », en se repoussant, le film de liquide entre ces deux phases.

L'énergie d'interaction surfacique de Van der Waals entre deux surfaces parallèles de constitution chimiques différentes et espacées de  $\delta$  est de la forme :

$$W_{12} = -\frac{\overline{\overline{A}}}{12 \pi \delta^2} \quad (1.5)$$

La grandeur  $\overline{\overline{A}}$  est appelée *consante de Hamaker*, et est fonction des propriétés molé-

lares du triplet de matériaux considéré. Ici ces deux matériaux sont la paroi solide et la phase vapeur, entre lesquelles est piégé le liquide. À cause de cette interaction forte, la pression dans le liquide n'est pas la même que dans la phase vapeur, sans considération de courbure de l'interface ou de contrainte hydrodynamique à cette interface. La différence de pression  $P_L - P_{vap}$  dans ces conditions est notée  $\Pi_d$ , est appelée *pression de disjonction*, et a pour expression :

$$\Pi_d = -\frac{dW_{12}}{d\delta} = -\frac{\overline{A}}{\delta^3} \quad (1.6)$$

La grandeur  $\overline{A}$  est appelé *constante de dispersion* et se définit facilement à partir de la constante de Hamaker. Cette constante de dispersion est toujours de l'ordre de  $10^{-20}$  Joules, quel que soit le triplet de matériaux envisagé.

Le fait que cette pression soit négative assure que l'interface liquide-vapeur soit repoussée par le mur solide. La forme de cette contrainte interfaciale va donc générer un film continu et stable, où aucun écoulement ni évaporation ne pourront avoir lieu. Puisque la constante de Hamaker est très faible, ce film adsorbé aura une hauteur extrêmement faible, de l'ordre d'une dizaine de nanomètres, et la pression de disjonction n'aura d'effet qu'à des épaisseurs de film de quelques centaines de nanomètres au maximum.

### 1.4.3 Ligne triple

La ligne triple est la ligne où coexistent à la fois des phases solide, liquide et vapeur. Tout film de liquide étant forcément borné dans l'espace, cette ligne triple se rencontre dans de nombreux cas de figures considérant des films de liquide.

Une ligne triple au repos possède un angle de contact  $\theta$  entre l'interface liquide-vapeur et la paroi solide déterminé par les tensions de surface  $\sigma$  entre les différentes phases et exprimé par la loi de Young-Dupré :

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{sv} - \sigma_{sl}}{\sigma_{lv}} \quad (1.7)$$

Les indices  $sv$ ,  $sl$ ,  $lv$  représentent respectivement la tension de surface entre les phases solide et vapeur, solide et liquide, liquide et vapeur.

Si la ligne triple se déplace, alors la considération d'une condition classique de non-glissement à la paroi solide n'est plus possible au niveau de cette ligne, car la dissipation visqueuse serait alors infinie. Pour relaxer cette singularité, il peut alors être considéré une longueur de glissement  $l_g$ , qui entre dans l'écriture de la condition de glissement de Navier. Cette condition de glissement remplace la condition de non-glissement au niveau

de la ligne triple par une loi linéaire entre la vitesse de glissement,  $v$ , et la contrainte visqueuse tangentielle.

$$U = l_g \partial_y U \quad (1.8)$$

La grandeur  $U$  représente toujours la composante longitudinale de la vitesse, et  $y$  est la direction perpendiculaire à la paroi solide. Cette condition de glissement est présentée en détail par Lauga *et al.* [45].

Malheureusement, une singularité hydrodynamique se développe au niveau de la ligne triple dans les modèles utilisant la longueur de glissement, et les contraintes visqueuses deviennent très importantes sur cette ligne. Il est malgré tout possible de déterminer la variation de l'angle entre l'interface liquide-vapeur et la paroi si on se place assez loin de la ligne triple, où viscosité et capillarité sont prises en compte. Cet angle est appelé macroscopique et est défini grâce à la connaissance d'un angle de contact microscopique très proche de la paroi, indépendant de la vitesse et connu *a priori*. La valeur de l'angle macroscopique d'une ligne triple en mouvement est donnée par la formule de Cox-Voinov :

$$\theta^3(x) = \theta_{micro}^3 - 9 Ca \log \left( \frac{x}{l_g} \right) \quad (1.9)$$

Le nombre capillaire  $Ca$  est le rapport entre les forces visqueuse et capillaire,  $\mu U / \sigma$ .

Un bon moyen de contourner la singularité hydrodynamique posée par la ligne triple est de supposer que la ligne triple n'a pas d'existence physique, mais est simplement le lieu de la jonction entre un film adsorbé et un film de liquide de plus grande épaisseur [86, 41, 8].

Le transfert de chaleur au niveau d'une ligne triple a été étudié par Potash et Wayner [66], Renk *et al.* [71], Moosman et Homsy [55] et Wayner [85].

Mathieu [53] décompose l'étude des transferts thermiques, dans un film de liquide présentant une ligne triple, en trois régions. Proche de la ligne triple est la micro-région, traitée dans le même esprit que Voinov [83]. Plus loin est une région de conduction, puis une région de convection. L'influence d'un chargement thermique sur l'angle de contact macroscopique à travers un fort flux d'évaporation a ainsi pu être quantifiée.

Panchamgam *et al.* [62] et Chatterjee *et al.* [16] ont considéré un ménisque anisotherme prolongé par un film adsorbé, et ont pu confirmer le fort flux d'évaporation ayant lieu pour de faibles hauteurs de liquide, dans la transition entre le film mince de liquide et le film adsorbé. Ce flux important est supposé générer un important flux de masse à l'intérieur même du film de liquide, entraînant des angles de contact anisothermes plus importants que l'angle de contact statique isotherme (Wayner *et al.* [85]). Benselama *et al.* [8] ont quant à eux été plus loin encore en partant d'un modèle plus complet élaboré à l'aide



d'une méthode de perturbation locale qui sera reprise dans ce mémoire. Il a ainsi été mis en évidence une ondulation du film adsorbé due à la thermocapillarité, sous certaines conditions, dans la zone de la ligne triple.

Dans sa thèse soutenue en 2012, Janeček [37] étudie l'hydrodynamique dans la région de la ligne triple quand celle-ci est chauffée, et s'intéresse au paradoxe hydrodynamique de la ligne triple. Il utilise ensuite ces résultats pour étudier la croissance d'une bulle de vapeur sur un substrat chauffé dans un bain de liquide.

## 1.5 Bulle contenue dans un capillaire

### 1.5.1 Modélisation

Pour qui veut plutôt s'intéresser à l'aspect macroscopique d'une bulle, le point de départ ne peut être un film adsorbé, car le modèle prenant en compte la pression de disjonction, prédominante à ces épaisseurs, n'est pas adapté pour modéliser des épaisseurs de liquide supérieures à quelques centaines de nanomètres. La condition aux limites utilisée dans la résolution du modèle est donc la condition macroscopique du raccord avec un ménisque de forme quasi-sphérique.

Des chercheurs se sont attachés à la modélisation de la dynamique isotherme d'une ligne triple se prolongeant par un film adsorbé. Kalliadasis et Chang [41] ont ainsi modélisé un ménisque complet remouillant un film adsorbé à vitesse constante. Ils ont pour cela exprimé l'équation différentielle portant sur la position de l'interface dans différentes régions de résolution en fonction des forces prépondérantes : force capillaire dans le ménisque, capillaire et visqueuse dans la zone où les hypothèses de lubrification sont applicables, visqueuse et de disjonction près de la ligne triple. Partant d'un ménisque sphérique, ils ont pu descendre de proche en proche jusqu'au film adsorbé et s'y raccorder en ajustant numériquement la valeur d'une constante d'intégration. Si cette étude est très intéressante puisqu'elle est véritablement multi-échelle, modélisant une interface variant de quelques millimètres à quelques nanomètres d'épaisseur, les simplifications appliquées aux équations pour y arriver rendent l'étude assez qualitative, et ne sauraient être systématisées à un modèle plus complet. Les auteurs arrivent, de plus, à la conclusion que le ménisque développé est non seulement de forme sphérique (seule la capillarité est prépondérante à ces distances caractéristiques) mais possède de plus un rayon de courbure égal au diamètre du tube capillaire. Ceci paraît adapté pour un ménisque reculant, mais pas pour un ménisque avançant sur un film adsorbé (cf. par exemple [69, 70, 49, 35]). Elle reste donc une étude *approchée* de la transition entre un ménisque complètement développé et un film de dimension nanométrique d'un indéniable intérêt mathématique.

Toujours dans le cadre d'une physique isotherme, Bretherton [12], dans son article fondateur et largement cité, a calculé la forme d'une bulle en mouvement uniforme dans un capillaire de rayon  $R$ , en considérant uniquement la capillarité dans les ménisques avant

et arrière, un film de liquide déposé immobile et d'épaisseur constante, et deux régions de transition entre ces trois régions, où les forces capillaires et visqueuses sont considérées d'égale importance. Il a pu en déduire des corrélations décrivant non seulement la hauteur du film de liquide déposé  $\delta$ ,

$$\delta = 1.337 R Ca^{2/3}, \quad (1.10)$$

mais aussi la variation de pression de part et d'autre de la bulle engendrée par les caractéristiques du film de liquide,

$$\Delta P = 7.447 Ca^{2/3} \frac{\sigma}{R}. \quad (1.11)$$

Ces résultats sont la conclusion d'une analyse des équations de Stokes pour de faibles niveaux de vitesse, c'est-à-dire à des valeurs de nombre capillaire et de Reynolds petits devant 1. De plus, les zones de transition sont analysées dans le cadre de la théorie de la lubrification, c'est-à-dire que les équations de conservation sont systématiquement simplifiées grâce à la faible épaisseur de liquide, ainsi que sa faible variation de hauteur. Ces résultats ont été dérivés et complétés mathématiquement à partir d'un modèle complet par Park et Homsy [63], toujours pour une bulle isotherme en mouvement uniforme. Ils utilisent, pour ce faire, à la fois le nombre capillaire  $Ca$  et le rapport  $\varepsilon$  des longueurs caractéristiques radiale et axiale comme paramètre de perturbation.

La corrélation de Bretherton n'est valable que pour des nombres capillaires relativement faibles, inférieurs à  $10^{-4}$  ou  $10^{-3}$ . Au delà, la loi de variation en  $Ca^{2/3}$  entraîne un rapport rayon du capillaire/épaisseur de film trop important pour être physiquement acceptable. Il existe donc pour des nombres capillaires plus grands un effet de confinement qui engendre une variation de l'épaisseur de film suivant une loi appelée loi de Taylor, rappelée ici (1.12), qui a été discutée en détail par Aussillous et Quéré [5] à partir de données expérimentales.

$$\frac{\delta}{R} = \frac{1.337 Ca^{2/3}}{1 + 1.337 \alpha Ca^{2/3}} \quad (1.12)$$

La constante  $\alpha$  est une constante d'ajustement de la loi avec l'expérience ( $\approx 2.5$  pour Aussillous et Quéré [5]).

Les expérimentations réalisées par Bretherton [12] parallèlement à son étude théorique ayant montré un écart entre les corrélations engendrées par son modèle avec les mesures expérimentales pour de très faibles valeurs de  $Ca$ , Ratulowski et Chang [67] ont montré que cet écart pouvait être expliqué par la présence d'impuretés dans le liquide, entraînant un effet Marangoni à l'interface par variation de concentration de tensioactifs. Cette étude est très proche d'une étude anisotherme, puisque les équations de diffusion de la chaleur et de diffusion d'espèces sont similaires.

Une étude véritablement anisotherme a été effectuée par Wilson *et al.* [88], où un ménisque simple ne se déplaçait pas mais pouvait changer de forme suivant les conditions de température à la paroi, le film liquide pouvait ainsi s'évaporer et s'assécher. Les auteurs ont de plus montré que l'état de la phase vapeur est forcément un état transitoire impactant la forme de l'interface liquide-vapeur à cause du flux de masse évaporée. Cette impact de la phase vapeur sur l'hydrodynamique de la bulle est important et doit être pris en compte.

La principale limitation de ces modèles macroscopiques est que, pour pouvoir accéder à la forme de l'interface en considérant un film liquide de quelques microns d'épaisseur sans s'exposer à de grosses difficultés de résolution, il faut omettre la prise en compte de la pression de disjonction dans le modèle. Si cette omission est justifiée sur presque toute la longueur du film, la pression de disjonction aura forcément un rôle à jouer au moment de l'assèchement de ce film, inévitable dans un contexte anisotherme.

### 1.5.2 Assèchement du film déposé

Nous avons déjà évoqué la dynamique d'une ligne triple, qu'elle soit physique ou considérée comme la transition vers un film adsorbé. Dans le cadre de l'étude de la dynamique d'une bulle anisotherme, le chercheur sera tôt ou tard confronté à l'assèchement du film de liquide déposé à la paroi, si la bulle considérée est suffisamment longue.

Morris [56, 57], et après lui Mathieu [53] et Janeček [37], a montré que l'angle de contact macroscopique d'une ligne triple en déplacement et soumis à un chargement thermique était indépendant de l'état du film de liquide en amont de cette ligne triple. Ainsi, Snoeijer *et al.* [79] a pu montrer par une étude expérimentale et un modèle simple de lubrification que le film de liquide, proche de la ligne triple, se stabilise à une hauteur contrôlée uniquement par la dynamique de cette ligne triple. Mais d'après l'étude de Bretherton [12], le ménisque déposant le film de liquide micrométrique impose lui-aussi une hauteur de film déposé qui est généralement inférieure à celle du film proche de la ligne triple. Il existe donc une transition entre ces deux hauteurs, ce qui peut créer un bourrelet de liquide avant l'assèchement du film, comme représenté par la figure 1.6.

La transition entre les deux hauteurs de film s'effectue à travers ce qui est appelé un *choc capillaire*, c'est-à-dire une variation très brusque de la hauteur. Ce choc capillaire a été étudié d'un point de vue purement mathématique par Bertozzi *et al.* [9]. En suivant Snoeijer [79], il possède lui aussi sa propre vitesse (fig. 1.6), ce qui abouti à l'étirement progressif du bourrelet présent au bout du film de liquide.

La vitesse de déplacement de la ligne triple est fonction de la dynamique et des mécanismes de transfert de chaleur dans la micro-région de la ligne triple. Elle est aussi et surtout fonction des conditions initiales appliquées au film de liquide. La dynamique de l'assèchement d'un film de liquide et de la création d'une (ou plusieurs) ligne triple est difficile à intégrer dans un modèle de bulle complet.

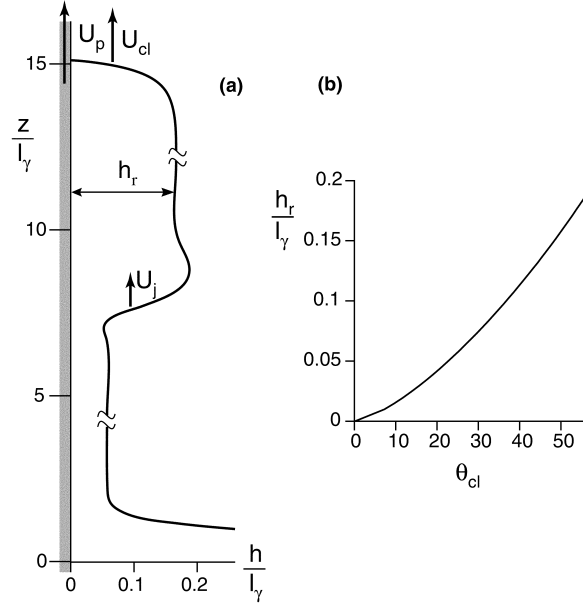


Figure 1.6: Schéma d'un film de liquide en déplacement [79]. Le ménisque capillaire et la ligne triple n'ont pas la même vitesse.

## 1.6 Contribution du présent mémoire

Le modèle qui est présenté dans le chapitre suivant est un modèle macroscopique du liquide entourant une bulle anisotherme en mouvement uniforme dans un tube capillaire. Le modèle microscopique est introduit uniquement pour un ménisque avançant sur une paroi asséchée, c'est-à-dire sur un film adsorbé résiduel. La limitation d'un film de liquide mal modélisé par l'omission des phénomènes physiques particuliers liés au mouvement de la ligne triple reste donc attaché à ce modèle.

Le chapitre 2 présente le modèle global utilisé dans la phase liquide, où les équations de Navier-Stokes sont résolues en utilisant les méthodes présentées dans le chapitre 3. Dans ce chapitre est aussi expliqué de quelle manière le domaine d'étude est décomposé suivant les effets physiques prépondérants, eux-mêmes liés en particulier à l'épaisseur du film de liquide.

Les différents problèmes découlant de ce découpage devront encore être résolus. La section 3.3 présente les techniques de résolution utilisées. Un développement en série de Taylor, utilisant les nombres capillaire et de Reynolds comme paramètre de perturbation, permet d'obtenir des problèmes très simplifiés au premier ordre, et prenant en compte de manière progressive l'ensemble des paramètres du modèle aux ordres supérieurs.

Les chapitres 4 et 5 regroupent les résultats concernant la résolution du problème liquide dans le ménisque avant de la bulle et dans le film de liquide, d'abord à l'ordre principal de perturbation (chap. 4), puis aux ordres supérieurs (chap. 5). Le chapitre 6,

quant à lui, regroupe les résultats portant sur le ménisque arrière de la bulle, avançant soit sur un film d'épaisseur micrométrique, soit sur un film adsorbé d'épaisseur nanométrique.

Enfin le chapitre 7 utilise les résultats des chapitres précédents, leur ajoute des bilans de masse et d'énergie portant sur la phase vapeur, et s'intéresse aux grandeurs importantes agissant sur l'expansion d'une bulle, en régime nécessairement transitoire.

# Chapitre 2

## Modélisation de la phase liquide

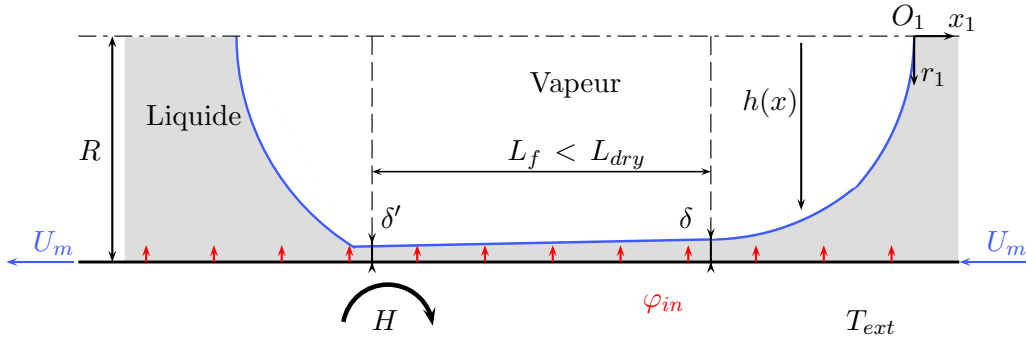
L'objectif de ce mémoire est la résolution semi-analytique des équations de conservations modélisant le comportement hydrodynamique et thermique de la phase liquide. Celle-ci entoure une bulle de vapeur contenue dans un tube capillaire de section cylindrique. Le domaine élémentaire de résolution est donc la bulle complète, avec ses deux ménisques, ainsi que les deux bouchons de liquide l'entourant, dont les champs de vitesse, de pression et de température se raccordent à des conditions d'écoulement convectif établi. Ce chapitre met donc en place un modèle complet de la phase liquide dans lequel, pour l'instant, la phase vapeur n'est considérée qu'à travers sa température de saturation,  $T_{sat}(P_v)$ , associée à la pression régnant dans la bulle.

Un point de vocabulaire est nécessaire avant de commencer cette modélisation. Il sera fait régulièrement mention de ménisques *avançant* ou *reculant*. Une interface séparant deux fluides est transportée par le fluide de plus grande masse volumique, c'est-à-dire le liquide dans notre cas. Nous parlerons donc de ménisque *reculant* quand l'interface est tirée par le bouchon liquide, à l'avant de la bulle, et de ménisque *reculant* quand l'interface est poussée par le bouchon de liquide, à l'arrière de la bulle. Un ménisque reculant dépose à la paroi un film d'épaisseur micrométrique, alors qu'un ménisque avançant remouille un film de liquide laissé à la paroi, que celui-ci soit micrométrique ou adsorbé.

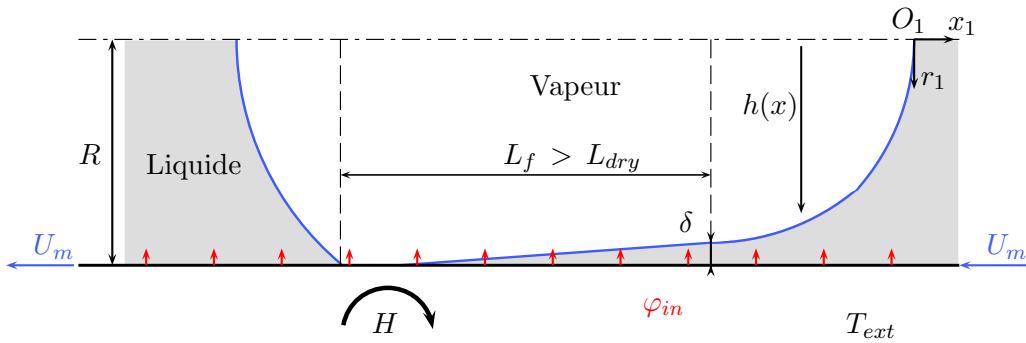
### 2.1 Équations de conservation

#### 2.1.1 Description du domaine

Nous voulons modéliser la dynamique d'une bulle complète en régime pseudo-stationnaire, c'est-à-dire que les ménisques avant et arrière se déplacent à une vitesse constante, et que les termes transitoires des équations de conservation ne sont pas considérés. Pseudo, car l'interface, au moins au niveau des ménisques, s'adapte à des conditions dans la phase



(a) Premier cas de figure : la distance entre les deux ménisques est inférieure à la longueur d'assèchement.



(b) Deuxième cas de figure : la distance entre les deux ménisques est supérieure à la longueur d'assèchement. Les problèmes avant et arrière peuvent être totalement découplés.

Figure 2.1: Schémas des différentes géométries de bulle considérées.

vapeur qui peuvent éventuellement évoluer. Nous traiterons cette situation transitoire de la phase vapeur au chapitre 7.

Deux cas de figure peuvent se présenter dans la description d'une bulle soumise à un chargement thermique. Le film de liquide présent entre la bulle et la paroi solide s'évapore en effet, et peut éventuellement s'assécher si la bulle considérée est assez longue. Si le film s'assèche, il est considéré malgré tout l'existence d'un film adsorbé à la paroi du capillaire. Il faut s'intéresser non seulement aux bulles assez courtes pour que le menisque arrière remouille un film d'épaisseur micrométrique, mais aussi aux bulles assez longues pour que ce film déposé s'évapore complètement, et que le menisque arrière remouille un film adsorbé. Ces deux situations sont schématisées par les figures 2.1a et 2.1b.

À cause de ces deux situations différentes, trois sous-problèmes sont à étudier. Tout d'abord, la partie avant de la bulle, qui en elle-même est un problème bien posé, et dans laquelle sont compris le menisque avant, le film déposé sur la paroi par ce menisque, et la région assurant la transition entre ces deux domaines. Les deux autres sous-problèmes envisagent le menisque arrière remouillant soit un film micrométrique, soit un film adsorbé.

Si le film de liquide n'est pas encore asséché lorsque le ménisque arrière arrive, le problème a comme conditions aux limites l'état du film à cet endroit. Les problèmes avant et arrière sont donc couplés, à travers le film de liquide séparant les deux ménisques. Si, en revanche, la bulle est assez longue pour que le film déposé soit asséché quand le ménisque arrière arrive, cette partie arrière avance sur un film adsorbé laissé par le film liquide en s'évaporant. Cette situation implique deux problèmes associés au liquide découplés entre l'avant et l'arrière de la bulle, puisque le film adsorbé, d'épaisseur constante, ne s'évapore pas.

La modélisation d'un ménisque avançant sur un film adsorbé doit prendre en compte la pression de disjonction, prépondérante à ces hauteurs de liquide. Ce modèle particulier ne sera évoqué, mis en place et résolu, que dans la deuxième partie du chapitre 6, consacré au ménisque arrière, section 6.2.

Les hypothèses et notations qui suivent seront utilisées dans l'ensemble du mémoire, quel que soit le sous-problème considéré :

Le tube est capillaire, de rayon  $R$ , c'est-à-dire que le rayon du tube est considéré inférieur à la longueur capillaire, ou encore,  $R$  est choisi de manière à obtenir un nombre de Bond du système inférieur à un. On y néglige donc les effets gravitaires, ce qui permet de considérer une géométrie axisymétrique du domaine.

Les ménisques se déplacent à une vitesse constante  $U_m$ , et les équations qui gouvernent la phase liquide sont exprimées dans un repère relatif lié à la bulle. Le repère de base du problème est le repère  $(O_1, r_1, x_1)$  représenté sur la figure 2.1. Le point  $O_1$  est positionné au centre du capillaire, au bout du ménisque avant. L'interface liquide-vapeur est paramétrée par la fonction  $h(x)$ , qui représente, soit la coordonnée radiale de l'interface, soit l'épaisseur du film de liquide. Ceci sera précisé plus loin.

La paroi est chauffée par une densité de flux de chaleur constante et uniforme notée  $\varphi_{in}$ . Le problème de la conduction de la chaleur dans la paroi sera abordé dans la section 2.2, mais il est utile de préciser dès maintenant qu'une perte de flux par convection naturelle et rayonnement vers l'extérieur du mur est considérée. Un coefficient d'échange thermique global  $H$  avec l'extérieur est donc considéré.

Une raison supplémentaire a motivé la prise en compte du transfert de chaleur vers l'extérieur de la paroi. Cette condition permet en effet d'imposer la température ambiante à l'extérieur du mur comme température de référence du système, et non la température de saturation de la vapeur. Ce modèle permet donc la variation de la température dans la bulle, autorisant ainsi la prise en compte ultérieure de l'effet du flux d'évaporation sur la phase vapeur.

Pour plus de clarté, toutes les grandeurs physiques relatives à la phase liquide seront écrites sans indice. On définit ainsi la masse volumique  $\rho$ , les viscosités dynamique et cinématique  $\mu$  et  $\nu$ , les conductivité et diffusivité thermiques  $\lambda$  et  $\alpha$ . D'autres grandeurs sont liées à l'interface liquide-vapeur :  $\sigma$  représente la tension de surface liquide-vapeur,



et  $h_{lg}$  représente l'enthalpie massique de changement de phase liquide-vapeur. Enfin, les grandeurs physiques relatives à la phase vapeur seront indicées  $v$ . Les capacités thermiques massiques de la vapeur à volume constant et pression constante seront aussi utilisées, et seront notées respectivement  $c_{v,v}$  et  $c_{p,v}$ .

### 2.1.2 Modélisation de la phase liquide

La plupart des travaux réalisés à ce jour se rapportant à un ménisque ou une bulle en mouvement dans un capillaire, considèrent des niveaux de vitesse permettant de négliger les effets inertiels sur la forme du ménisque, et donc de ne considérer que les équations de Stokes (Park et Homsy [63], Ratulowski et Chang [67]). De plus, ces équations de Stokes sont généralement simplifiées dans le cadre des hypothèses de lubrification (Bretherton [12], Kalliadasis [41]).

La présente étude utilise les hypothèses de lubrification uniquement pour déterminer les ordres de grandeurs des différentes longueurs axiales et radiales quand l'interface liquide-vapeur se rapproche de la paroi. En soi, notre modèle ne sera pas subordonné à ces hypothèses, bien que, dans un premier temps, la méthode de résolution utilisée rapproche notre problème d'un problème de lubrification. De plus, les niveaux de vitesse mesurés dans les caloducs oscillants ( $\sim 0.1 \text{ m.s}^{-1}$ ), dans des tubes de dimension capillaire, correspondent à des nombres de Reynolds de quelques centaines pour de l'eau, ce qui laisse à penser que l'influence des effets inertiels sur la forme de la bulle ne sont pas toujours aussi négligeables que pour les études citées plus haut.

Les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible, en régime permanent et sans source de chaleur volumique, sont donc considérées dans la phase liquide :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.1a)$$

$$\rho (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\mathbf{u}} = -\vec{\nabla} P + \mu \Delta \vec{\mathbf{u}} \quad (2.1b)$$

$$(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\nabla}) T = \alpha \Delta T \quad (2.1c)$$

Ici  $\vec{\mathbf{u}}$ ,  $P$  et  $T$  représentent les champs de vitesse, de pression et de température liquide. La géométrie axisymétrique du problème amène à ne considérer que les projections axiale et radiale de ces équations.

## 2.2 Conduction dans la paroi solide

### 2.2.1 Quelle méthode de résolution ?

À la genèse de l'élaboration du modèle présenté ici, il a été envisagé de résoudre l'équation de la chaleur dans la paroi du capillaire, afin de prendre en compte sa diffusivité thermique, et donc en particulier son inertie. L'optique était de se rapprocher d'un cas pratique, où la paroi solide est chauffée par une source volumique, en général imposée par effet Joule. Elle permettait aussi de prendre en compte les phénomènes de stockage d'énergie dans le mur lors du passage du bouchon de liquide, énergie qui est restituée très rapidement au moment du passage du ménisque à cause de l'important flux thermique, créé par l'évaporation du film de liquide à la paroi [17].

Résoudre l'équation de la chaleur dans la paroi n'a de sens que si cette équation est écrite selon deux dimensions, en coordonnées cylindriques, où le problème est considéré axisymétrique. Du point de vue du liquide, cela revient à considérer une condition de flux de chaleur variant axialement sur la paroi intérieure du mur en contact avec le liquide.

$$-\lambda \partial_r T \big|_{R} = \varphi(x) \quad (2.2)$$

La température  $T$  est la température commune du liquide et de la paroi à leur interface. Les deux régions, celle du liquide et celle du solide, sont naturellement couplées, et doivent être résolues simultanément. Malheureusement, il est plus facile de résoudre la région liquide dans un repère relatif lié à la bulle, alors que le problème du solide demande un repère lié au mur pour éviter de compliquer l'écriture des bilans. Le repère attaché à la bulle semble, malgré tout, une meilleure solution, avec un champ de température dans le mur et un flux à l'interface solide-liquide qui vont suivre le déplacement du ménisque.

Encore faut-il résoudre l'équation de la chaleur en deux dimensions cylindriques dans un cylindre creux compris entre les rayons  $R_1$  et  $R_2$ , chauffé par un flux volumique constant  $\dot{q}_0$ , comportant une condition de Neumann sur la paroi intérieure, et une condition de Newton sur la paroi extérieure, considérant globalement la convection naturelle et le rayonnement linéarisé. Il faut aussi définir des conditions aux limites axiales. Bien qu'en réalité il y ait peu d'indication sur la forme de ces conditions, on peut supposer, si ces limites sont suffisamment éloignées du ménisque, que le flux de chaleur axial dans le mur devient négligeable. On impose donc des conditions de Neumann aux limites axiales du domaine. Le modèle global s'écrit alors :

$$\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r T) + \partial_{x^2} T = \frac{\dot{q}_0}{\lambda} \quad (2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} -\lambda \partial_r T \big|_{r=R_1} &= \varphi(x) \\ -\lambda \partial_r T \big|_{r=R_2} &= H(T(R_2, x) - T_{ext}) \\ \partial_r T \big|_{x=0} &= 0 \\ \partial_r T \big|_{x=L} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Une résolution utilisant la méthode de séparation des variables ne permet pas d'obtenir une équation sur les valeurs propres du système, puisque la partie axiale du problème se résout en cosinus et sinus hyperboliques. Les conditions aux limites axiales imposent alors une valeur propre unique et nulle. Une condition axiale de Dirichlet ne change pas le problème, et une condition de Newton n'a positivement aucun sens physique.

Une autre méthode, dans le cas de la résolution d'un opérateur laplacien en coordonnées cylindriques, est l'utilisation de transformées de Hankel, faisant appel aux fonctions de Bessel. Les fonctions de Bessel sont notées  $J_\alpha(x)$  (fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $\alpha$ ) et  $Y_\alpha(x)$  (fonction de Bessel de seconde espèce d'ordre  $\alpha$ ) et sont les solutions des équations

$$d_{x^2}y + \frac{1}{x}d_xy + \frac{x^2 - \alpha^2}{x^2}y = 0 \quad (2.5)$$

qui se trouvent être proches de l'expression de la partie radiale de l'opérateur laplacien en coordonnées cylindriques.

Le principe d'utilisation des transformées de Hankel est très proche de celui de transformées de Fourier : changer la base de résolution d'une équation pour la simplifier et pouvoir la résoudre. Les transformées de Fourier introduisent la fonction exponentielle pour simplifier les équations transitoires, et de la même manière les transformées de Hankel introduisent les équations de Bessel pour simplifier la partie radiale du laplacien exprimé en coordonnées cylindriques. Tout ceci est très clairement expliqué, avec quantité d'exemples, dans l'ouvrage de Sneddon [78] sur le sujet.

En pratique, la transformation s'écrit :

$$\overline{T}(\lambda, x) = \int_0^\infty r T(r, x) J_\alpha(\lambda r) dr \quad (2.6)$$

Avec  $T$  le champ de température dans l'espace physique et  $\overline{T}$  le champ de température dans l'espace de Hankel. Puisque notre domaine est fini, c'est-à-dire compris entre des rayons notés  $R_1$  pour le rayon intérieur et  $R_2$  pour le rayon extérieur, il faudra utiliser la version "finie" de la transformée, proposée originellement par Sneddon [78]. Enfin, puisque nos conditions aux limites ne sont pas "classiques", il faut prendre une transformée

généralisée comme proposée par Garg *et al.* [23] :

$$\overline{T}(\lambda, x) = \int_{R_1}^{R_2} r T(r, x) N_0(\lambda r) dr \quad (2.7)$$

où  $N_0(\lambda r)$  est une combinaison linéaire des fonctions de Bessel de première et deuxième espèce, d'ordre 0, permettant de simplifier l'expression finale en fonction des conditions aux limites adoptées. En effet, l'application de cette transformation à la partie radiale de l'opérateur laplacien exprimé en coordonnées cylindriques axisymétriques s'écrit après deux intégrations par parties, considérant  $N_0(\lambda r)$  solution de l'équation (2.5) :

$$\int_{R_1}^{R_2} r \left( \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r T) \right) N_0(\lambda r) dr = \left[ r \partial_r T N_0(\lambda r) - \lambda r T N_0'(\lambda r) \right]_{R_1}^{R_2} + \lambda^2 \overline{T}(\lambda, x) \quad (2.8)$$

L'équation (2.3) devient alors :

$$\left[ r \partial_r T N_0(\lambda r) - \lambda r T N_0'(\lambda r) \right]_{R_1}^{R_2} + \lambda^2 \overline{T}(\lambda, x) + \partial_{x^2} \overline{T} = \frac{\dot{q}_0}{\lambda} \int_{R_1}^{R_2} r N_0(\lambda r) dr \quad (2.9)$$

Cette équation paraît facile à résoudre, s'il est possible de trouver la bonne expression de  $N_0(\lambda r)$  pour simplifier le premier terme de cette égalité, et fournir une équation aux valeurs propres. Voilà le problème de cette méthode de résolution : aucune forme de  $N_0(\lambda r)$  remplissant ces conditions n'existe *a priori*. Comme pour l'application de la méthode de séparation des variables, les conditions aux limites axiales ne permettent pas de définir complètement les constantes d'intégration issues de la résolution de l'équation (2.9).

Détailler les multiples tentatives qui ont été effectuées et les raisons de leurs échecs ne serait pas indiqué dans le cadre de ce mémoire. Une autre modélisation a été finalement adoptée, et a permis de simplifier la prise en compte de la paroi solide, en donnant des résultats qui ne perdent ni en intérêt, ni en enseignement.

### 2.2.2 Problème final

Il a donc été décidé de négliger la diffusivité thermique de la paroi. Cette hypothèse permet d'enlever toute la partie axiale du problème solide, et le flux considéré sur la paroi interne du mur en contact avec le liquide devient indépendant de l'abscisse  $x$ .

Il est justifié d'effectuer ces hypothèses dans le sens où la capacité thermique massique du cuivre (métal très utilisé dans les systèmes thermiques contenant de l'eau) est dix fois

plus faible que celle de l'eau, et que la conductance thermique d'un tube capillaire de cuivre, du fait de sa conductivité importante, est elle aussi très supérieure à celle de l'eau qui y circule. Ainsi, il est considéré que le mur n'aura qu'un faible effet sur le film de liquide.

Un bilan de flux est effectué dans un cylindre creux de rayon intérieur  $R_1$ , de rayon extérieur  $R_2$  et de hauteur  $dx$ , dans lequel est générée une production volumique de chaleur  $\dot{q}_0$ , avec un transfert conductif en  $R_1$  et conductif en  $R_2$ .

$$-2\pi R_1 \lambda \partial_n T |_{r=R} dx + \dot{q}_0 \pi (R_2^2 - R_1^2) = 2\pi R_2 H (T(R, x) - T_{ext}) dx \quad (2.10)$$

où  $H$  est le coefficient de transfert thermique global entre la paroi et le milieu extérieur. Considérons à présent que les rayons  $R_1$  et  $R_2$  sont très proches, c'est-à-dire que  $R_1/R_2 \approx 1$ . Si on définit une densité de flux surfacique comme suit :

$$\varphi_{in} = \dot{q}_0 \frac{\text{Volume du cylindre creux}}{\text{Surface intérieure du cylindre}} \quad (2.11)$$

alors le bilan (2.10) peut s'écrire sous la forme :

$$-\lambda \partial_r T |_{r=R} + \varphi_{in} = H (T(R, x) - T_{ext}) \quad (2.12)$$

La densité de flux surfacique  $\varphi_{in}$  peut être indifféremment définie par rapport à la surface extérieure ou intérieure du cylindre creux, puisque ces deux surfaces sont très proches.

## 2.3 Physique de l'interface

Après la condition thermique à la paroi du capillaire, il faut maintenant s'intéresser aux conditions aux limites s'appliquant à l'interface liquide-vapeur. Puisque cette interface n'est pas rigide, elle est susceptible de se déformer par les contraintes s'y appliquant. À la différence du mur où de simples conditions de non glissement et de non pénétration sont prises en compte en guise de conditions dynamique et cinématique, il faut ici s'intéresser non seulement aux conditions thermiques, mais aussi aux conditions dynamiques s'appliquant à l'interface liquide-vapeur.

### 2.3.1 Conditions dynamiques

Le bilan des contraintes dynamiques à l'interface peut être séparé en deux parties en le projetant sur une base liée à l'interface. Il existe donc un bilan des contraintes normales à l'interface, et un bilan tangentiel.

### a) Contraintes normales

Les contraintes dynamiques normales, qu'elles soient capillaire ou hydrodynamique, voire même dues à la pression de recul ou à tout autre mécanisme physique dont l'effet est notable dans la description de la physique de l'interface, engendrent un saut de pression à cette interface. Il est considéré que l'interface ne possède pas d'épaisseur. En réalité cependant, la transition entre le liquide et la vapeur se fait en l'espace de quelques distances inter-moléculaires, et c'est la différence entre les pressions du liquide et de la vapeur de chaque coté de cette variation abrupte des grandeurs physiques du fluide considéré qui est appelée saut de pression à l'interface. Ce saut de pression s'effectue sur une distance tellement faible qu'elle est considérée nulle.

Les forces capillaires seront responsables de la majorité du saut pression enregistré à l'interface. Ces forces sont engendrées par un déséquilibre des contraintes moléculaires s'appliquant sur l'interface liquide-vapeur, dû à la différence importante entre les affinités (ou potentiels chimiques) des phases liquide et vapeur du fluide de travail. Ce déséquilibre dans le bilan de forces s'appliquant sur les molécules de l'interface a donc tendance à la déformer de manière à minimiser l'aire entre le liquide et la vapeur. L'équilibre des travaux des forces de pression entre les deux phases conduit à la loi dite de Young-Laplace, qui s'écrit :

$$P_v - P(h) = \sigma c \quad (2.13)$$

Ici  $c$  représente la courbure totale locale de l'interface liquide-vapeur en  $m^{-1}$ , et  $\sigma$  la tension de surface. La courbure peut être exprimée de manière générale en fonction du paramètre hauteur d'interface noté  $h(x)$  et représenté sur la figure 2.1. Ce calcul est détaillé en Annexe B, et aboutit à l'expression :

$$c = \frac{1}{h(1 + d_x h^2)^{1/2}} - \frac{d_{xx} h}{(1 + d_x h^2)^{3/2}} \quad (2.14)$$

Pour simplifier certains calculs dans la suite de ce mémoire, une fonction  $\Phi$  est définie à partir du saut de pression  $P_v - P(h)$ . Ce saut de pression est pondéré par la pression générée par la courbure azimutale de la bulle, quand la hauteur  $h$  est proche du rayon du capillaire  $R$  :

$$\Phi = P_v - P(h) - \frac{\sigma}{R} \quad (2.15)$$

La contribution des contraintes hydrodynamiques est, elle aussi, prise en compte. Bien sûr, puisque la partie hydrostatique du tenseur des contraintes, à savoir la pression, est déjà prise en compte à travers la fonction  $\Phi$ , seule la partie déviatorique du tenseur est à ajouter au bilan, en la projetant sur la normale à l'interface. Les contraintes hydrodynamiques

de la phase vapeur sur l'interface sont négligées, car la vapeur est supposée à l'équilibre. Le liquide est newtonien et isochore. Dans ces conditions, le déviateur du tenseur des contraintes hydrodynamiques a pour expression :

$$\Sigma = \mu \begin{pmatrix} 2 \partial_r v & \partial_r u + \partial_x v \\ \partial_r u + \partial_x v & 2 \partial_x u \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

avec  $u$  et  $v$  les composantes axiale et radiale du champ de vitesse du liquide, évaluées à l'interface liquide-vapeur.

Enfin, la dernière contrainte prise en compte dans ce bilan des contraintes normales à l'interface est d'origine thermique. Le flux massique d'évaporation, noté  $G^{lg}$ , va en effet exercer une pression sur l'interface liquide-vapeur, appelée pression de recul et ayant pour expression :

$$\Pi_r = (G^{lg})^2 \left( \frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho} \right) \quad (2.17)$$

En soi, il est possible d'ajouter autant de contraintes d'interface que l'on veut, suivant la physique que l'on veut modéliser. Ce serait le cas des forces électromagnétiques, ou de la pression de disjonction  $\Pi_d$  évoquée au chapitre précédent, qui peuvent être ajoutées dans ce bilan normal des contraintes, pour modéliser par exemple des films adsorbés d'épaisseur très faible (quelques nanomètres).

## b) Contraintes tangentielles

La contribution importante à considérer dans la projection des contraintes tangentielles à l'interface est la partie tangentielle du déviateur du tenseur des contraintes hydrodynamiques. Une variation éventuelle de la température du liquide à l'interface liquide-vapeur entraîne un effet Marangoni dans le film de liquide. Il est généralement admis que la contrainte tangentielle due à cet effet est proportionnelle au gradient tangentiel de la tension de surface. De plus, la tension de surface varie, en première approximation, linéairement avec la température comme suit :

$$\sigma(T) = \sigma_\star - \gamma(T - T_\star) \quad \text{avec} \quad \gamma = \left. \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right|_{T=T_\star} \quad (2.18)$$

Le coefficient  $\gamma$  est supposé constant, et  $\sigma_\star$  représente la tension de surface évaluée à la température de référence  $T_\star$ . La contrainte tangentielle à l'interface liquide-vapeur est donc de la forme :

$$\Pi_c = \vec{\mathbf{t}} \cdot \vec{\nabla} \sigma \quad (2.19)$$

où  $\vec{\mathbf{t}}$  représente le vecteur tangent à l'interface.

Toutefois, si la phase vapeur est pure et supposée portée à saturation, il est démontré [7] que la thermocapillarité n'a pas d'effet notable sur les contraintes interfaciales tangentielles. Il en est autrement si la vapeur n'est pas à saturation ou si le gaz se compose de plusieurs espèces, comme les incondensables pratiquement inévitables dans un caloduc. Dans le cadre de ce mémoire, il a été vérifié a posteriori que les variations tangentielles de température le long de l'interface liquide-vapeur sont assez faibles pour que ce terme puisse être négligé dans le bilan des contraintes tangentielles à l'interface.

#### d) Bilan des contraintes dynamiques à l'interface

Dans un film de liquide d'épaisseur micrométrique, l'épaisseur de ce film est toujours trop importante pour que la pression de disjonction joue un rôle significatif. Dans ce cas, elle sera donc omise dans le bilan des contraintes à l'interface liquide-vapeur :

$$\Phi + \frac{\sigma}{R} + \vec{n} \cdot \Sigma \cdot \vec{n} = \sigma \left( \frac{1}{h(1 + d_x h^2)^{1/2}} - \frac{d_x h}{(1 + d_x h^2)^{3/2}} \right) + (G^{lg})^2 \left( \frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho} \right) \quad (2.20)$$

$$\vec{t} \cdot \Sigma \cdot \vec{n} = 0 \quad (2.21)$$

L'absence des effets dispersifs dans ce modèle simplifie grandement son traitement. Il faut cependant remarquer que ce parti-pris empêche de modéliser l'assèchement du film de liquide considéré quand, sous l'effet de l'évaporation, l'épaisseur de ce film devient assez faible pour que la pression de disjonction prenne le pas sur les autres effets physiques décrits précédemment, et entraîne la formation d'un film adsorbé. Il est donc impossible de modéliser, dans l'état du modèle, ni la ligne triple formée à l'endroit du raccord entre les films déposé et adsorbé, ni la dynamique de celle-ci, ni le bourrelet de liquide pouvant se former à l'extrémité du film, si l'angle de contact macroscopique est plus important que l'angle entre le film déposé et la paroi. Les longueurs d'assèchement qui pourront être calculées à partir du présent modèle ne seront donc qu'une extrapolation d'un film mince déposé par un ménisque reculant, en supposant que la ligne triple se déplace à la même vitesse que le ménisque avant, en l'absence de bourrelet de liquide.

#### f) Bilan de masse

Le lien entre les deux problèmes dynamique et thermique est assuré par le bilan de masse à l'interface, puisque la densité de flux massique d'évaporation, elle-même liée à la densité du flux de chaleur, provoque une variation axiale du flux de masse dans la phase liquide, noté  $G$ . La définition de cette densité de flux de masse de liquide est :

$$G(x) = \rho \int_{h(x)}^R 2\pi u(r, x) r dr \quad (2.22)$$



On peut ainsi poser le bilan suivant :

$$-d_x G(x) = 2\pi h(x) G^{lg}(x) \quad (2.23)$$

### 2.3.2 Condition thermique

Une condition à l'interface est nécessaire pour pouvoir résoudre le problème thermique. Cette condition est fournie par le bilan d'énergie à l'interface, constitué de cinq termes : l'énergie échangée par convection entre l'interface et la phase liquide, le transfert conductif dans le liquide, l'énergie transportée par changement de phase, et les transferts conductif et convectif de la phase vapeur avec l'interface.

Dans la plupart des travaux consultés [85, 88, 8], les transferts de chaleur conductif et convectif entre l'interface et la phase vapeur sont négligés. De plus, l'évaporation n'est pas suffisamment forte pour que l'apport convectif de la phase liquide à l'interface soit important comparé au transfert conductif dans cette phase. Il n'est donc retenu dans le bilan de flux de chaleur à l'interface liquide-vapeur que le transfert conductif côté liquide et le flux d'évaporation :

$$-\lambda \partial_n T |_{h(x)} = h_{lg} G^{lg}(x) \quad (2.24)$$

L'intérêt de négliger les transfert thermiques avec la phase vapeur est évident pour la résolution. Ainsi, les phases vapeur et liquide ne sont couplées qu'à travers la densité de flux de masse évaporée  $G^{lg}$ , définie grâce à la loi de Hertz-Knudsen, exprimée dans l'annexe A :

$$K_{dim} G^{lg} = T(h) - T_{sat} \quad \text{avec} \quad K_{dim} = \sqrt{\frac{2\pi R_g T_{sat}}{M_g}} \frac{T_{sat}}{\rho_v h_{lg}} \quad (2.25)$$

Les grandeurs  $R_g$  et  $M_g$  représentent respectivement la constante des gaz parfaits et la masse molaire du fluide considéré. Il est donc établi ici une condition thermique mixte inhomogène à l'interface liquide-vapeur de la forme :

$$\lambda \partial_n T |_{h(x)} + \frac{h_{lg}}{K_{dim}} T(h) = \frac{h_{lg}}{K_{dim}} T_{sat} \quad (2.26)$$

## 2.4 Adimensionnement - Problème complet

Le modèle est adimensionné pour en faire ressortir les grandeurs paramétriques importantes, faciliter la prise en compte de différents fluides, et éventuellement définir des

corrélations portant sur les inconnues du système, comme par exemple la hauteur du film de liquide déposé.

### 2.4.1 Définition des grandeurs caractéristiques

La longueur caractéristique du problème est le rayon  $R$  du capillaire. Bien sûr, puisque la hauteur de liquide varie en fonction de la position axiale, entre le ménisque et le film de liquide, de nouvelles longueurs caractéristiques vont être définies. Cela fait partie d'une analyse multi-échelles qui sera abordée au chapitre 3.

Pour la zone située autour des ménisques,  $R$  est la seule longueur caractéristique, aussi bien dans les directions axiale que radiale. Les vitesses axiales et radiales sont de même toutes deux adimensionnées par la seule valeur  $U_m$  de la vitesse du ménisque. Cette zone est de courbure quasi-constante, car la capillarité y joue un rôle prépondérant. La pression caractéristique est donc liée à ces forces capillaires par la grandeur  $\sigma/R$ .

La densité de flux de masse évaporée sera maximale si toute l'énergie amenée à la paroi est effectivement transformée par le changement de phase à l'interface liquide-vapeur. La densité de flux de masse évaporée est donc adimensionnée par  $\varphi_{in}/h_{lg}$ .

C'est la température extérieure au capillaire qui est définie comme température de référence, et la différence  $T - T_{ext}$  entre la température de la phase liquide et cette température extérieure est adimensionnée par la différence de température dans un liquide d'épaisseur  $R$ , soumis à une densité de flux de chaleur  $\varphi_{in}$ , où seul le transfert conductif est considéré :  $\varphi_{in}R/\lambda$ .

La densité de flux de masse liquide, quant à elle, est assimilée à un débit de liquide, et adimensionnée par le débit théorique d'un fluide de vitesse  $U_m$ , contenu dans une conduite de rayon  $R$  :  $2\pi R^2 \rho U_m$

La densité de flux de masse évaporée,  $G^{lg}$ , est notée  $\Gamma^{lg}$  de manière adimensionnée, tandis que la densité de flux de masse liquide,  $G$ , est notée  $\Gamma$ . Les grandeurs adimensionnées du système sont donc définies de la manière suivante :

$$\left. \begin{aligned} r &= R r^* & ; & & x &= R x^* \\ u &= U_m U^* & ; & & v &= U_m V^* \\ P &= \frac{\sigma}{R} P^* & ; & & T - T_{ext} &= \frac{\varphi_{in} R}{\lambda} T^* \\ G^{lg} &= \frac{\varphi_{in}}{h_{lg}} \Gamma^{lg} & ; & & G &= 2\pi R^2 \rho U_m \Gamma \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Dans la suite de ce mémoire, les étoiles désignant les grandeurs adimensionnées seront omises pour aider à la clarté de l'écriture.

## 2.4.2 Modélisation finale

L'adimensionnement des équations du modèle fait apparaître une série de nombres sans dimension qui sont définis comme suit :

$$\left. \begin{aligned} Re &= \frac{U_m R}{\nu} & ; & \quad Ca = \frac{U_m \mu}{\sigma} & ; & \quad Bi = \frac{H R}{\lambda} \\ E &= \frac{\varphi_{in}}{h_{lg} \rho U_m} & ; & \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Le nombre  $Re$  représente le nombre de Reynolds,  $Ca$  le nombre capillaire,  $Bi$  le nombre de Biot entre l'extérieur du capillaire et le liquide.  $Pr$  représente le nombre de Prandtl.

Il faut remarquer que le nombre  $E$  défini ici peut se ramener à un nombre d'évaporation, comme il est possible d'en voir la définition dans Wilson *et al.* [88] par exemple, en remplaçant la différence de température normalement présente dans son expression par notre "différence de température" caractéristique  $\varphi_{in} R / \lambda$ .

Le modèle de la phase liquide que nous nous proposons de résoudre est donc de la forme :

**Equations de conservation :**

$$\partial_x U + \frac{1}{r} \partial_r (r V) = 0 \quad (2.29a)$$

$$Re (U \partial_x U + V \partial_r U) = -\frac{1}{Ca} \partial_x P + \partial_{x^2} U + \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r U) \quad (2.29b)$$

$$Re (U \partial_x V + V \partial_r V) = -\frac{1}{Ca} \partial_r P + \partial_{x^2} V + \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r V) \quad (2.29c)$$

$$Re Pr (U \partial_x T + V \partial_r T) = \partial_{x^2} T + \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r T) \quad (2.29d)$$

**Conditions à la paroi :**

$$U(1, x) = -1 \quad ; \quad V(1, x) = 0 \quad (2.30a)$$

$$-\partial_r T|_{r=1} + 1 = Bi T(1, x) \quad (2.30b)$$

**Conditions à l'interface,  $r = h(x)$  :**

Bilan de contraintes normales :

$$\begin{aligned} \Phi + 1 + \frac{2 Ca}{1 + d_x h^2} (d_x h^2 \partial_x U - d_x h (\partial_x V + \partial_r U) + \partial_r V) \\ = \frac{1}{h(1 + d_x h^2)^{1/2}} - \frac{d_{x^2} h}{(1 + d_x h^2)^{3/2}} + Re Ca \Gamma^{lg^2} \left( \frac{1}{\rho} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.31a)$$

Bilan de contraintes tangentielles :

$$(2d_x h (\partial_x U - \partial_r V) + (d_x h^2 - 1)(\partial_x V - \partial_r U)) = 0 \quad (2.31b)$$

Bilan d'énergie :

$$-(d_x h \partial_x T - \partial_r T) = (1 + d_x h^2)^{1/2} \Gamma^{lg} \quad (2.32)$$

**Bilan de masse :**

$$\Gamma(x) = \int_{h(x)}^1 U(r, x) r dr \quad (2.33a)$$

$$-d_x \Gamma(x) = E h(x) \Gamma^{lg}(x) \quad (2.33b)$$

**Loi constitutive d'évaporation :**

$$K^* \Gamma^{lg}(x) = T(h(x), x) - T_{sat}^* \quad (2.34)$$

Cette dernière équation est l'adimensionnement de l'équation de Hertz-Knudsen, présentée dans l'annexe A et rappelée par (2.25). La résistance thermique d'interface  $K$  liée au saut de température (cf. section A.3) et la température vapeur adimensionnée  $T_{sat}^*$  sont définies comme suit :

$$K^* = \frac{\lambda}{R h_{lg}} K_{dim} \quad ; \quad T_{sat} - T_{ext} = \frac{\varphi_{in} R}{\lambda} T_{sat}^*$$

## **2.5 Conclusion**

Après avoir défini la modélisation globale de la phase liquide entourant une bulle de vapeur, il faut à présent adapter ce modèle aux différentes régions et configurations d'un tel système en mouvement. La modélisation d'un ménisque et d'un film de liquide, par exemple, ne peut pas être identique, car les mécanismes prépondérants ne sont pas les mêmes selon la région considérée. De même, la modélisation d'un ménisque remouillant une paroi asséchée ou un film de liquide n'est pas identique.

Dans le chapitre suivant sont donc élaborés, à partir du modèle global présenté ci-dessus, différents modèles adaptés aux différentes régions autour de la bulle. Il y est aussi évoqué le déroulement que suivra la résolution, qui sera spécifique à chaque modèle.

Enfin, ces différents modèles doivent malgré tout être reliés entre eux pour définir une bulle complète et son environnement. Des généralités sur les méthodes de raccordement seront donc évoquées à la fin du chapitre 3.

# Chapitre 3

## Démarche et méthode de résolution

### 3.1 Structuration de la résolution

#### 3.1.1 Principes de base

Le modèle global de la phase liquide délimitant une bulle en translation uniforme chauffée par une densité de flux de chaleur constante a été mis en place dans le chapitre précédent. Ce modèle a besoin de trois paramètres en entrée : la vitesse de la bulle,  $U_m$ , l'importance du chargement thermique,  $\varphi_{in}$ , et la température de saturation dans la bulle,  $T_{sat}$ .

De ce modèle global sont tirés quatre modèles particuliers, qui modélisent la physique de l'écoulement du liquide et de sa thermique à des longueurs caractéristiques différentes.

- Le modèle du ménisque. Les longueurs caractéristiques axiale et radiale de ce modèle sont toutes les deux définies comme le rayon  $R$  du capillaire. Ce modèle possède donc la même forme que le modèle global. Suivant que le ménisque avance ou recule, les conditions aux limites du modèle changent.
- Le modèle du film de liquide. Ce film de liquide déposé par un ménisque reculant possède une longueur caractéristique radiale très petite par rapport à sa longueur caractéristique axiale, ce qui entraîne la prépondérance des effets visqueux sur les forces capillaires.
- La transition entre un ménisque et un film de liquide. Il est indispensable de prendre en compte une région intermédiaire entre un ménisque et un film de liquide, dans laquelle capillarité et viscosité sont considérées. Les longueurs caractéristiques de ce modèle sont donc définies à partir des équations de la lubrification. De même que pour le modèle du ménisque, suivant que la transition considérée se fasse entre

le film de liquide et le ménisque avant d'une part, ou le ménisque arrière d'autre part, les conditions aux limites considérées diffèrent.

- La transition entre un ménisque et un film adsorbé. Enfin, dans le cas de l'assèchement de la paroi dû au chargement thermique, le ménisque arrière remouille un film adsorbé. Dans ce modèle de transition, la pression de disjonction est prise en compte dans le bilan des contraintes normales à l'interface. Ces longueurs caractéristiques sont cependant définies elles-aussi à partir des équations de la lubrification. Ce modèle en particulier ne sera pas abordé dans le présent chapitre, mais seulement dans la deuxième partie du chapitre 6 consacré au ménisque arrière d'une bulle.

Les régions de la bulle dans lesquelles sont résolues ces différents modèles sont représentées dans la figure 3.1. Le modèle du ménisque est résolu dans les régions numérotées 1 et 5. Le modèle de transition entre un ménisque et un film de liquide est résolu dans les régions 2 et 4. Enfin, le modèle du film de liquide est résolu dans la région 3

Ces différents modèles peuvent être résolus indépendamment, ce qui permet d'écrire pour chaque région une équation portant sur la position  $h(x)$  de l'interface liquide-vapeur. Cette équation est appelée *équation d'interface*. À partir de ce paramètre d'interface peuvent être définies toutes les autres inconnues du modèle, comme les champs de vitesse, de pression et de température, ainsi que la densité de flux de masse évaporée.

Cependant, leur résolution fait intervenir plusieurs constantes d'intégration comme le rayon des ménisques ou la hauteur initiale du film de liquide déposé, entre autres. Ces constantes d'intégration sont déterminées en raccordant ces différentes régions entre elles, par des conditions imposées sur la fonction  $h(x)$  à leur jonction, selon des procédures détaillées à la fin de ce chapitre.

### 3.1.2 Différentes longueurs caractéristiques

Définissons à présent les différentes longueurs caractéristiques nécessaires aux modèles du film de liquide et de transition.

Dans le film déposé par le ménisque avant, c'est la viscosité qui prime devant la capillarité, la hauteur de liquide devenant faible devant le rayon du tube capillaire, ainsi que sa variation axiale. Mais considérer séparément une partie de la bulle où la capillarité est le terme prépondérant, et une autre où les effets visqueux sont importants n'est pas suffisant. Il y a obligatoirement, entre les deux, une région, appelée zone de transition, où capillarité et viscosité ont toutes les deux un effet d'égale importance.

Les longueurs caractéristiques de cette zone de transition sont déterminées à partir des hypothèses de lubrification, présentées au chapitre 1 (section 1.4.1). Nous avons vu que ces hypothèses simplifient les équations de conservation de la quantité de mouvement

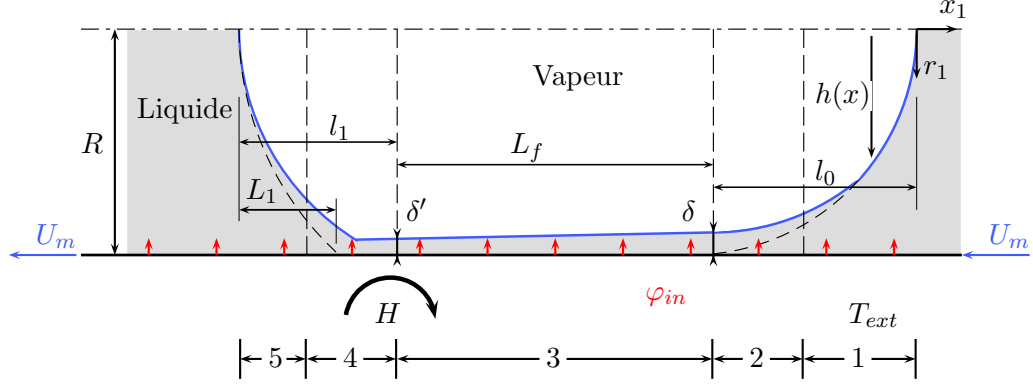


Figure 3.1: Découpage d'une bulle de Taylor en cinq régions de résolution : ménisque avant, transition avant, film mince, transition arrière et ménisque arrière respectivement.

pour générer le modèle rappelé ci-dessous :

$$-\frac{1}{Ca}\partial_x P + \partial_{r^2} U = 0 \quad (3.1a)$$

$$\partial_r P = 0 \quad (3.1b)$$

En ce qui concerne la projection normale du bilan des contraintes à l'interface liquide-vapeur, les faibles niveaux de vitesse proche de la paroi solide autorisent à négliger la contribution du déviateur du tenseur des contraintes hydrodynamiques, en comparaison de la courbure de cette interface. Le bilan des contraintes normales se simplifie donc comme suit :

$$\Phi + 1 = 1 - d_{x^2} h \quad (3.2)$$

Le saut de pression  $\Phi$  et la vitesse axiale  $U$  sont toujours de même ordre de grandeur que dans la zone du ménisque, c'est-à-dire  $\Phi = O(1)$  et  $U = O(1)$ . Par ailleurs, il est rappelé que la longueur caractéristique axiale est notée  $L$ , et la longueur caractéristique radiale est notée  $\delta$ .

L'équation (3.1b) permet de remplacer  $\partial_x P$  par  $\partial_x \Phi$  dans (3.1a). Dans ces conditions, une analyse d'ordre de grandeur des équations (3.1a) et (3.2) donne :

$$\frac{\delta^2}{L} \approx O(Ca) \quad ; \quad \frac{\delta}{L^2} \approx O(1) \quad (3.3)$$

Le nombre capillaire reste faible devant 1 pour les vitesses considérées ( $\approx 10^{-3}$  pour de l'eau,  $\approx 10^{-2}$  pour de l'éthanol). Il est indispensable que les longueurs caractéristiques axiales et radiales à adopter dans le modèle de transition satisfassent les deux relations



précédentes, pour que les forces visqueuses et capillaires soient effectivement à l'équilibre dans cette région. Les ordres de grandeur suivant sont donc obtenus :

$$\frac{\delta}{R} \approx O(Ca^{2/3}) \quad ; \quad \frac{L}{R} \approx O(Ca^{1/3}) \quad (3.4)$$

Pour ce qui est des longueurs caractéristiques dans le film mince, où uniquement la viscosité est prépondérante, la hauteur du film est elle aussi de l'ordre de  $Ca^{2/3}$ , au moins au début du film. L'ordre de grandeur de la longueur caractéristique axiale est quant à lui de 1, puisqu'une bulle de Taylor peut avoir des dimensions importantes (c'est-à-dire au moins des dimensions millimétriques).

## 3.2 Les modèles du film de liquide et de transition

Par convention, chaque région est associée à un repère local indexé par le numéro de la région. Les différentes grandeurs physiques sont indexées de la même manière.

Les modèles des ménisques avant et arrière sont identiques au modèle global, seuls les repères dans lesquels ils sont exprimés changent. De même, les modèles associés au film de liquide et à la transition de celui-ci avec le ménisque avant sont exprimés dans un repère local, situé à la paroi, à l'endroit où ce film de liquide est initialement déposé. Cependant, s'ils sont situés au même endroit, ils n'auront pas les mêmes longueurs caractéristiques, comme nous l'avons vu précédemment. Enfin, le repère dans lequel est exprimé le modèle associé à la zone de transition entre le film et le ménisque arrière est situé lui aussi à la paroi, mais à la fin du film de liquide, c'est-à-dire à une longueur  $L_f$  du début du film, dans le cas où un assèchement de ce film n'est pas considéré.

Ces repères sont donc définis comme suit :

$$\left. \begin{aligned} r_2 &= (1 - r_1) Ca^{-2/3} \quad ; \quad x_2 = (x_1 + l_0) Ca^{-1/3} \\ r_3 &= (1 - r_1) Ca^{-2/3} \quad ; \quad x_3 = x_1 + l_0 \\ r_5 &= r_1 \quad ; \quad x_5 = x_1 + (l_0 + L_f + l_1) \\ r_4 &= (1 - r_5) Ca^{-2/3} \quad ; \quad x_4 = (x_5 - l_1) Ca^{-1/3} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Les différentes distances utilisées ici sont reportées sur la figure 3.1. On se donne initialement la longueur de la bulle, et par voie de conséquence la valeur de la longueur  $L_f$ . En revanche, les longueurs  $l_0$ ,  $l_1$  et  $L_1$  seront déterminées en même temps que les constantes d'intégration, par raccordement entre les différentes régions. Toutes ces longueurs sont positives.

Ces changements des longueurs caractéristiques d'un repère à l'autre engendrent des changements pour certaines grandeurs caractéristiques, comme par exemple le champ de température ou le flux de masse. La conservation de la masse (2.29a) impose quant à elle un changement de vitesse caractéristique. Puisque la vitesse axiale  $U$  reste de l'ordre de l'unité à cause de la condition à la paroi, c'est la vitesse caractéristique associée à la composante radiale  $V$  qui doit changer. On définit ainsi les nouvelles grandeurs :

$$V_3 = -\frac{V_1}{Ca^{2/3}} \quad ; \quad h_3 = \frac{1-h_1}{Ca^{2/3}} \quad ; \quad T_3 = \frac{T_1}{Ca^{2/3}} \quad ; \quad \Gamma_3 = \frac{\Gamma_1}{Ca^{2/3}} \quad (3.6)$$

$$V_i = -\frac{V_1}{Ca^{1/3}} \quad ; \quad h_i = \frac{1-h_1}{Ca^{2/3}} \quad ; \quad T_i = \frac{T_1}{Ca^{2/3}} \quad ; \quad \Gamma_i = \frac{\Gamma_1}{Ca^{2/3}} \quad (3.7)$$

avec  $i = 2$  ou  $4$  selon que les grandeurs soient exprimées pour la transition avant ou arrière, respectivement. Les grandeurs non redimensionnées ici possèdent les mêmes ordres de grandeur que dans le modèle du ménisque.

### 3.2.1 Modèle du film de liquide

De nouveaux nombres adimensionnés sont définis dans la région du film pour prendre en compte les variations de longueur caractéristique du problème :

$$E_f = E Ca^{-2/3} \quad ; \quad K = K^* Ca^{-2/3} \quad ; \quad Bi_m = Bi Ca^{2/3} \quad (3.8)$$

Partant de l'équation de conservation de la masse du modèle global, exprimée dans le repère  $(O_1, r_1, x_1)$ , et rappelée ici :

$$\partial_{x_1} U_1 + \frac{1}{r_1} \partial_{r_1} (r_1 V_1) = 0 \quad (3.9)$$

le changement de repère (3.5) est utilisé pour exprimer cette équation sous une forme adaptée à la région du film de liquide :

$$\partial_{x_3} U_1 + \frac{1}{Ca^{2/3} (1 - Ca^{2/3} r_3)} \partial_{r_3} ((1 - Ca^{2/3} r_3) V_1) = 0 \quad (3.10)$$

Enfin, les différentes grandeurs de cette équation doivent elles-aussi être écrites de manière adaptée au modèle du film de liquide grâce aux définitions (3.6), ce qui permet d'écrire la conservation de la masse dimensionnée au film de liquide comme suit :

$$\partial_{x_3} U_3 + \frac{1}{1 - Ca^{2/3} r_3} \partial_{r_3} ((1 - Ca^{2/3} r_3) V_3) = 0 \quad (3.11)$$

Par la suite, les indices de régions appliqués aux longueurs  $r$  et  $x$  seront omis pour gagner en clarté, les autres grandeurs indicées permettant de savoir dans quel repère est exprimée l'équation considérée.

Le même changement de repère, ainsi que le changement de l'expression des différentes grandeurs du modèle, est utilisé pour l'ensemble des équations du modèle global, ce qui permet d'obtenir le modèle particulier suivant, adapté à la modélisation d'un film de liquide déposé sur la paroi d'un capillaire :

**Equations de conservation :**

$$\begin{aligned} Re \, Ca^{4/3} (U_3 \partial_x U_3 + V_3 \partial_r U_3) = \\ - Ca^{1/3} \partial_x P_3 + Ca^{4/3} \partial_{x^2} U_3 + \frac{1}{1 - Ca^{2/3} r} \partial_r ((1 - Ca^{2/3} r) \partial_r U_3) \end{aligned} \quad (3.12a)$$

$$\begin{aligned} Re \, Ca^{7/3} (U_3 \partial_x V_3 + V_3 \partial_r V_3) = \\ - \partial_r P_3 + Ca^{7/3} \partial_{x^2} V_3 + \frac{Ca}{1 - Ca^{2/3} r} \partial_r ((1 - Ca^{2/3} r) \partial_r V_3) \end{aligned} \quad (3.12b)$$

$$Re \, Pr \, Ca^{4/3} (U_3 \partial_x T_3 + V_3 \partial_r T_3) = Ca^{4/3} \partial_{x^2} T_3 + \frac{1}{1 - Ca^{2/3} r} \partial_r ((1 - Ca^{2/3} r) \partial_r T_3) \quad (3.12c)$$

**Conditions à la paroi :**

$$U_3(0, x) = -1 \quad ; \quad V_3(0, x) = 0 \quad (3.13a)$$

$$\partial_r T_3 |_{r=0} + 1 = Bi_m T_3(1, x) \quad (3.13b)$$

**Conditions à l'interface,  $r = h_3(x)$  :**

De la même manière, après transformation, les bilans de contraintes normale et tangentielle à l'interface, ainsi que le bilan d'énergie à cette interface, s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Phi_3 + 1 + \frac{2 Ca}{1 + Ca^{4/3} d_x h_3^2} (Ca^{4/3} d_x h_3^2 \partial_x U_3 - d_x h_3 (Ca^{4/3} \partial_x V_3 + \partial_r U_3) + \partial_r V_3) \\ = \frac{1}{(1 - Ca^{2/3} h_3)(1 + Ca^{4/3} d_x h_3^2)^{1/2}} + \frac{Ca^{2/3} d_x h_3}{(1 + Ca^{4/3} d_x h_3^2)^{3/2}} + Re Ca (\Gamma^{lg}_3)^2 \left(\frac{1}{\rho} - 1\right) \end{aligned} \quad (3.14a)$$

$$2 Ca^{4/3} d_x h_3 (\partial_x U_3 - \partial_r V_3) + (Ca^{4/3} d_x h_3^2 - 1)(Ca^{4/3} \partial_x V_3 - \partial_r U_3) = 0 \quad (3.14b)$$

$$Ca^{4/3} d_x h_3 \partial_x T_3 - \partial_r T_3 = (1 + Ca^{4/3} d_x h_3^2)^{1/2} \Gamma^{lg}_3 \quad (3.14c)$$

**Bilan de masse :**

$$\Gamma_3(x) = \int_0^{h_3(x)} U_3(r, x) (1 - Ca^{2/3} r) dr \quad (3.15a)$$

$$-d_x \Gamma_3(x) = E_f (1 - Ca^{2/3} h_3(x)) \Gamma^{lg}_3(x) \quad (3.15b)$$

**Loi constitutive d'évaporation :**

$$K \Gamma^{lg}_3(x) = T_3(h(x), x) - T_{sat,3}^* \quad (3.16)$$

### 3.2.2 Région de transition

Dans cette partie,  $i$  peut être remplacé par 2 ou 4 suivant la position du modèle de transition considéré, à l'avant ou à l'arrière du film de liquide. De nouveaux nombres adimensionnés sont là encore définis :

$$E_{tr} = E Ca^{-1/3} \quad ; \quad K = K^* Ca^{-2/3} \quad ; \quad Bi_m = Bi Ca^{2/3} \quad (3.17)$$

Par une démarche similaire de changement de repère entre  $(O_1, r_1, x_1)$  et  $(O_2, r_2, x_2)$  ou  $(O_4, r_4, x_4)$ , l'ensemble des équations de conservation et des conditions aux limites du modèle global est réécrit de manière adaptée à la modélisation des régions de transition.

**Equations de conservation :**

$$\partial_x U_i + \frac{1}{1 - Ca^{2/3} r} \partial_r ((1 - Ca^{2/3} r) V_i) = 0 \quad (3.18a)$$

$$\begin{aligned} Re \, Ca (U_i \partial_x U_i + V_i \partial_r U_i) = \\ - \partial_x P_i + Ca^{2/3} \partial_{x^2} U_i + \frac{1}{1 - Ca^{2/3} r} \partial_r ((1 - Ca^{2/3} r) \partial_r U_i) \end{aligned} \quad (3.18b)$$

$$\begin{aligned} Re \, Ca^{5/3} (U_i \partial_x V_i + V_i \partial_r V_i) = \\ - \partial_r P_i + Ca^{4/3} \partial_{x^2} V_i + \frac{Ca^{2/3}}{1 - Ca^{2/3} r} \partial_r ((1 - Ca^{2/3} r) \partial_r V_i) \end{aligned} \quad (3.18c)$$

$$Re \, Pr \, Ca (U_i \partial_x T_i + V_i \partial_r T_i) = Ca^{2/3} \partial_{x^2} T_i + \frac{1}{1 - Ca^{2/3} r} \partial_r ((1 - Ca^{2/3} r) \partial_r T_i) \quad (3.18d)$$

**Conditions à la paroi :**

$$U_i(0, x) = -1 \quad ; \quad V_i(0, x) = 0 \quad (3.19a)$$

$$\partial_r T_i |_0 + 1 = Bi_m T_i(0, x) \quad (3.19b)$$

**Conditions à l'interface,  $r = h_i(x)$  :**

On considère ici la configuration où la région de transition ne se raccorde pas avec un film adsorbé, mais avec un film de liquide micrométrique. La bulle est donc considérée assez petite pour que la paroi ne s'assèche pas.

$$\begin{aligned} \Phi_i + 1 + \frac{2 \, Ca^{2/3}}{1 + Ca^{2/3} d_x h_i^2} (Ca^{2/3} d_x h_i^2 \partial_x U_i - d_x h_i (Ca^{2/3} \partial_x V_i - \partial_r U_i) + \partial_r V_i) \\ = \frac{1}{(1 - Ca^{2/3} h_i)(1 + Ca^{2/3} d_x h_i^2)^{1/2}} + \frac{d_{x^2} h_i}{(1 + Ca^{2/3} d_x h_i^2)^{3/2}} + Re \, Ca (\Gamma^{lg_i})^2 \left( \frac{1}{\bar{\rho}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (3.20a)$$

$$2 Ca^{2/3} d_x h_i (\partial_x U_i - \partial_r V_i) + (Ca^{2/3} d_x h_i^2 - 1) (Ca^{2/3} \partial_x V_i - \partial_r U_i) = 0 \quad (3.20b)$$

$$Ca^{2/3} d_x h_i \partial_x T_i - \partial_r T_i = (1 + Ca^{2/3} d_x h_i^2)^{1/2} \Gamma^{lg}_i \quad (3.20c)$$

**Bilan de masse :**

$$\Gamma_i(x) = \int_0^{h_i(x)} U_i(r, x) (1 - Ca^{2/3} r) dr \quad (3.21a)$$

$$-d_x \Gamma_i(x) = E_{tr} (1 - Ca^{2/3} h_i(x)) \Gamma^{lg}_i(x) \quad (3.21b)$$

**Loi constitutive d'évaporation :**

$$K \Gamma^{lg}_i(x) = T_i(h(x), x) - T_{sat,i}^* \quad (3.22)$$

### 3.3 Méthode de résolution

La méthode de résolution présentée ici s'appuie sur un développement en série de Taylor classique, associé à une méthode de perturbation du domaine pour prendre en compte la frontière libre du domaine de résolution constituée par l'interface liquide-vapeur.

#### 3.3.1 Développement en série de Taylor

En l'état, les modèles présentés dans les sections 2.4.2 et 3.2 ne sont pas solubles par une approche directe. Tous les modèles présentés précédemment s'expriment avec des puissances un tiers du nombre capillaire  $Ca$  ainsi qu'avec le nombre de Reynolds  $Re$ . Les solutions du modèle peuvent donc être exprimées par un développement en série de Taylor fonction de  $Ca^{1/3}$  et  $Re$ , considérés comme des paramètres de perturbations.

Les fonctions solutions à déterminer sont les suivantes :

U	: Composante axiale de la vitesse. Fonction de $x$ et $r$ .
V	: Composante radiale de la vitesse. Fonction de $x$ et $r$ .
T	: Température de la phase liquide. Fonction de $x$ et $r$ .
P	: Pression dans la phase liquide. Fonction de $x$ et $r$ .
h	: Hauteur de liquide. Fonction de $x$ uniquement.
$\Gamma$	: Densité de flux de masse liquide. Fonction de $x$ uniquement.
$\Gamma^{lg}$	: Densité de flux de masse évaporée. Fonction de $x$ uniquement.
$\Phi$	: Saut de pression à l'interface. Fonction de $x$ uniquement.
$\delta$	: Hauteur de liquide au début du film mince. Indépendant de $x$ et de $r$ .
$\delta'$	: Hauteur de liquide à la fin du film mince. Indépendant de $x$ et de $r$ .

Chacune de ces variables, notée génériquement  $Z$ , est alors exprimée par la relation :

$$Z(r, x) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{1}{i!j!} Ca^{\frac{i}{3}} Re^j Z^{[ij]}(r, x) \quad (3.23)$$

$$\text{avec } Z^{[ij]}(r, x) = \left. \frac{d^i Z}{d \left( Ca^{\frac{1}{3}} \right)^i} \right|_{Ca=0} \times \left. \frac{d^j Z}{d Re^j} \right|_{Re=0} \quad (3.24)$$

En faisant tendre  $Ca$  et  $Re$  vers 0 dans les équations des modèles particuliers, ceux-ci ne s'expriment alors qu'en fonction des variables  $Z^{[00]}$ , c'est-à-dire des variables exprimées à l'ordre 0 en  $Ca^{1/3}$  et  $Re$ , appelé aussi ordre principal. Ces modèles simplifiés deviennent alors solubles, car seuls les termes non fonction de  $Ca^{1/3}$  ou  $Re$  dans les modèles complets sont pris en compte à l'ordre principal. Par exemple, dans le modèle de transition entre le ménisque et le film de liquide, l'ordre principal est équivalent à celui dérivé des hypothèses de lubrification, avec une composante anisotherme.

Cependant, quand bien même le nombre capillaire est petit devant un, l'ordre principal n'est pas suffisant pour rendre compte de la physique entrant en jeu dans une bulle chauffée. Certains effets physiques qui font parties des modèles mis en place, comme par exemple la partie advective des équations de bilan, ou la variation de pression dans le film de liquide due à son évaporation, ne peuvent être étudiés à l'ordre principal.

Il faut donc garnir progressivement les modèles simplifiés, en considérant des termes d'ordre supérieur du développement en série de Taylor. Ceux-ci sont obtenus par dérivations successives suivant (3.24). La connaissance de  $Z^{[00]}$  autorise l'accès aux ordres supérieurs et rend ainsi soluble le modèle enrichi.

On pourra alors, en résolvant les modèles à des ordres supérieurs, mieux apprécier l'importance de phénomènes physiques trop souvent jugés secondaires, voir négligeables.

### 3.3.2 La méthode de perturbation du domaine

Une difficulté reste à lever avant de pouvoir commencer la résolution des différents problèmes. Une des limites du domaine de résolution, l'interface liquide-vapeur paramétrée par  $h$ , est une inconnue du problème. En fait, c'est en fonction de  $h$  que seront explicitées toutes les autres grandeurs, la résolution d'un ordre de calcul se réduisant à la résolution d'une équation différentielle ordinaire portant sur la forme de l'interface liquide-vapeur. La grandeur  $h(x)$  va donc varier au fur et à mesure que seront ajoutés les ordres supplémentaires, fonction de  $Ca^{1/3}$  ou  $Re$ . Il est indispensable, pour les ordres supérieurs, de ramener le domaine de résolution, allant du mur à  $h(x)$ , à un domaine déjà connu allant du mur à  $h^{[00]}$ . Ce changement d'espace de résolution s'effectue à l'aide d'une *fonction de transformation*, au prix de l'ajout d'un terme supplémentaire aux équations définies sur l'interface perturbée, fonction de variables d'ordres inférieurs déjà connues.

Il est à noter que la méthode de perturbation du domaine revient à une systématisation du développement de Taylor (3.23) appliqué au voisinage de l'ordre principal  $h^{[00]}$  de la forme de l'interface. Sans cette systématisation, la méthode deviendrait d'une difficulté énorme aux ordres supérieurs.

La théorie de ces transformations, permettant de prendre en compte la variation spatiale du domaine de résolution, a été initiée par Hadamard [31] en 1908, et développée en particulier par Garabedian et Schiffer [22], ainsi que par Joseph [38, 39]. Elle est expliquée et synthétisée dans Benselama *et al.* [8] et ce qui suit en est largement inspiré.

Tout d'abord, la fonction de transformation ne s'applique que dans la direction radiale, puisque le paramètre d'interface est défini radialement. Cette transformation, notée  $Y_{i,j}$  par la suite, associe à chaque valeur de  $r_0$  comprise entre 0 et  $h^{[00]}$  une valeur  $r$  comprise entre 0 et  $h(x)$ .

$$\begin{aligned} Y_{i,j} &: \Omega_{0,0} \rightarrow \Omega_{i,j} \\ r_0 &\mapsto r \end{aligned} \quad (3.25)$$

Les indices  $i$  et  $j$  se réfèrent à l'ordre de développement voulu en  $Ca^{1/3}$  et  $Re$ , respectivement. Bien sûr,

$$Y_{0,0}(r_0) = r_0 \quad (3.26)$$

et il est indispensable que les limites du domaine de départ correspondent aux limites du domaine d'arrivée :

$$Y_{i,j}(0) = 0 \quad ; \quad Y_{i,j}(h^{[00]}(x)) = h(x) \quad (3.27)$$

À partir de cette fonction de transformation, il est possible de définir la dérivée totale d'une grandeur à n'importe quel ordre de développement :

$$\frac{dZ}{d(Ca^{1/3})} = \frac{\partial Z}{\partial (Ca^{1/3})} + \mathbf{W}_{Ca} \cdot \nabla Z \quad (3.28a)$$

$$\frac{dZ}{dRe} = \frac{\partial Z}{\partial Re} + \mathbf{W}_{Re} \cdot \nabla Z \quad (3.28b)$$



Où  $\mathbf{W}_{Ca}$  et  $\mathbf{W}_{Re}$  sont les fonctions “taux de déformation” de la transformation, dépendant des paramètres de perturbation  $Ca^{1/3}$  et  $Re$ , respectivement. Ces taux de déformations sont définis uniquement axialement. Les dérivées totales sont donc de la forme :

$$\frac{dZ}{d(Ca^{1/3})} = \frac{\partial Z}{\partial(Ca^{1/3})} + \frac{dY_{i,j}}{d(Ca^{1/3})} \partial_r Z \quad (3.29a)$$

$$\frac{dZ}{dRe} = \frac{\partial Z}{\partial Re} + \frac{dY_{i,j}}{dRe} \partial_r Z \quad (3.29b)$$

Une transformation  $Y_{i,j}$  satisfaisant les conditions (3.26) et (3.27) peut-être par exemple :

$$Y_{i,j}(r_0) = \frac{h(x)}{h^{[00]}} r_0 = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{1}{i!j!} Ca^{\frac{i}{3}} Re^j r_0 \frac{h^{[ij]}(x)}{h^{[00]}} \quad (3.30)$$

L’énorme avantage de cette transformation est de ne pas modifier dans notre modèle les équations de bilan dans la phase liquide, ni les conditions à la paroi du capillaire. Seules les équations s’appliquant à l’interface liquide-vapeur se trouveront modifiées par cette transformation.

Un exemple vaut mieux que mille discours ; considérons donc l’équation (2.34), qui est rappelée ici.

$$K \Gamma^{lg}(x) = T(h(x), x) - T_v \quad (3.31)$$

$T_v$  est supposée constante,  $\Gamma^{lg}$  et  $T(h, x)$  sont toutes les deux développées suivant la définition (3.23), c’est-à-dire :

$$K \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{1}{i!j!} Ca^{\frac{i}{3}} Re^j \Gamma^{lg[ij]}(x) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{1}{i!j!} Ca^{\frac{i}{3}} Re^j T^{[ij]}(h(x), x) - T_v \quad (3.32)$$

La hauteur  $h(x)$  est elle aussi un développement de Taylor fonction de  $Ca^{1/3}$  et  $Re$ . Écrire l’ordre [00] revient à prendre  $Ca = Re = 0$ , il ne reste donc que

$$K \Gamma^{lg[00]}(x) = T^{[00]}(h^{[00]}, x) - T_v \quad (3.33)$$

Ceci reste simple, et servira à la résolution du problème à l’ordre principal. Pour écrire cette équation à l’ordre [10], c’est-à-dire au premier ordre en  $Ca^{1/3}$ , il faut lui appliquer une opération de dérivée totale suivant  $Ca^{1/3}$ , puis faire tendre  $Ca$  et  $Re$  vers zéro. Dans ces conditions tous les termes des sommes infinies pour  $i > 1$  et  $j \geq 1$  seront nuls, et (3.32) devient alors :

$$K \left( \Gamma^{lg[00]}(x) + Ca^{1/3} \Gamma^{lg[10]}(x) \right) = (T^{[00]}(r, x) + Ca^{1/3} T^{[10]}(r, x)) - T_v \quad (3.34)$$

Ici, puisque l'opération  $Y_{1,0}$  transforme  $h$  en  $h^{[00]}$ , l'équation 3.34 est exprimée pour  $r = h^{[00]}$ . Dérivant selon  $Ca^{1/3}$  en utilisant la formule (3.29a), les dérivées partielles des grandeurs  $\Gamma^{lg^{[00]}}$ ,  $T^{[00]}$ , etc., sont nulles, et il reste :

$$\begin{aligned} K \left( \frac{dh}{d(Ca^{1/3})} \partial_r \Gamma^{lg^{[00]}}(x) + \Gamma^{lg^{[10]}} + Ca^{1/3} \frac{dh}{d(Ca^{1/3})} \partial_r \Gamma^{lg^{[10]}}(x) \right) \\ = \left( \frac{dh}{d(Ca^{1/3})} \partial_r T^{[00]}(r, x) + T^{[10]}(r, x) + Ca^{1/3} \frac{dh}{d(Ca^{1/3})} \partial_r T^{[00]}(r, x) \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Faisant tendre  $Ca$  vers zéro, et remarquant que  $\Gamma^{lg}$  ne dépend que de la direction axiale, on obtient :

$$K \Gamma^{lg^{[10]}} = (h^{[10]} \partial_r T^{[00]}(r, x) + T^{[10]}(r, x)) \quad (3.36)$$

Il est remarquable que l'expression de la loi constitutive d'évaporation au premier ordre en  $Ca^{1/3}$  ne soit pas plus compliquée que celui de l'ordre principal. En fait,  $T^{[00]}$  est déjà connue et n'ajoute qu'un terme d'inhomogénéité dans l'équation différentielle d'interface. Une fois l'ordre [10] résolu, l'ordre [20] de la loi (3.31) est exprimé ainsi :

$$K \Gamma^{lg^{[20]}} = \left( h^{[10]^2} \partial_{r^2} T^{[00]}(r, x) + h^{[20]} \partial_r T^{[00]} + 2 h^{[10]} \partial_r T^{[10]}(r, x) + T^{[20]}(r, x) \right) \quad (3.37)$$

Ceci montre que lors de la montée en ordre, la taille des équations devient rapidement très importante, compliquant d'autant l'aspect de l'équation d'interface à résoudre. Heureusement, la difficulté théorique de la résolution n'en est pas augmentée, seulement la complexité des calculs, et certains logiciels de calcul formel sont conseillés pour ce genre d'exercice.

## 3.4 Généralités sur la procédure de résolution

Il n'est présenté ici que le déroulement de la résolution des modèles dans le cas où le film de liquide ne s'assèche pas, en vue d'obtenir une équation d'interface liquide-vapeur régissant sa position à n'importe quel niveau de correction et pour tout jeu de paramètres ( $\varphi_{in}$ ,  $U_m$ ,  $T_{sat}$  et fluide de travail).

### 3.4.1 Problème associé aux ménisques

Les équations de Navier-Stokes (2.29), écrites pour des longueurs caractéristiques capillaires, indiquent que le champ de pression est constant pour les ordres de perturbation inférieurs à 3 en  $Ca^{1/3}$ , et ce quel que soit l'ordre de perturbation en  $Re$ . Puisque la

pression dans la phase vapeur est supposée constante elle aussi, les sauts  $\Phi_1^{[ij]}$  et  $\Phi_5^{[ij]}$  sont constants, pour  $i$  inférieur ou égal à 2, et quel que soit  $j$ .

De plus, la contribution du déviateur du tenseur des contraintes hydrodynamiques n'intervient dans le bilan des contraintes normales à l'interface liquide-vapeur qu'à partir du troisième ordre en  $Ca^{1/3}$  lui aussi. L'équation (2.31a) à l'ordre principal s'écrit donc en fonction du saut de pression  $\Phi^{[00]}$ , constant, et de la courbure de l'interface.

$$\Phi_1^{[00]} + 1 = \frac{1}{h_1^{[00]} \left(1 + d_x h_1^{[00]2}\right)^{1/2}} - \frac{d_x h_1^{[00]}}{\left(1 + d_x h_1^{[00]2}\right)^{3/2}} = \text{Constante} \quad (3.38)$$

Pour des ordres de perturbation inférieurs ou égaux à 2 en  $Ca^{1/3}$  et quelconque en  $Re$ , les équations d'interface des ménisques avant et arrière sont donc données directement par l'équation (2.31a) écrite à l'ordre voulu, les constantes  $\Phi_1^{[ij]}$  et  $\Phi_5^{[ij]}$  permettant un raccordement avec les régions de transition. En revanche, aucune information ne peut être obtenue sur le champ de vitesse dans les bouchons de liquide à l'avant ou à l'arrière de la bulle à ces niveaux de perturbation. Les inconnues  $U_1^{[00]}$  et  $V_1^{[00]}$  ne sont accessibles qu'au troisième ordre de perturbation en  $Ca^{1/3}$ .

La partie thermique du modèle associé aux ménisques est quant à elle découplée de la partie dynamique. Seule le transfert diffusif dans la phase liquide peut être déterminé avant l'ordre 3 en  $Ca^{1/3}$ , puisque le champ de vitesse, sur lequel est basé l'évaluation du transfert advectif, est encore inconnu. C'est donc un pan important de la physique anisotherme d'un ménisque en déplacement qui est laissé de côté aux premiers ordres de résolution.

### 3.4.2 Région du film et régions de transition

Dans les modèles de film et de transition, les ordres supérieurs auront la même forme que l'ordre principal, la seule différence provenant de termes d'inhomogénéités fonctions des ordres inférieurs déjà connus. Ceci a pour conséquence de pouvoir généraliser à n'importe quel ordre de perturbation la procédure de résolution pour obtenir l'équation d'interface. A des ordres élevés, l'équation d'interface est plus fastidieuse à écrire, mais en aucune façon techniquement plus difficile à obtenir (et à résoudre).

La procédure de traitement des problèmes associés aux zones de transition et du film de liquide est schématisée dans la figure 3.2. La seule inconnue présente dans la projection radiale de la conservation de la quantité de mouvement, écrite pour ces régions à n'importe quel ordre de perturbation, est la dérivée radiale de la pression. Le bilan des contraintes normales à l'interface liquide-vapeur permet donc d'écrire le champ de pression en fonction de la hauteur d'interface  $h^{[ij]}$  et des ordres inférieurs de celle-ci.

## PROBLÈME THERMIQUE

## PROBLÈME DYNAMIQUE

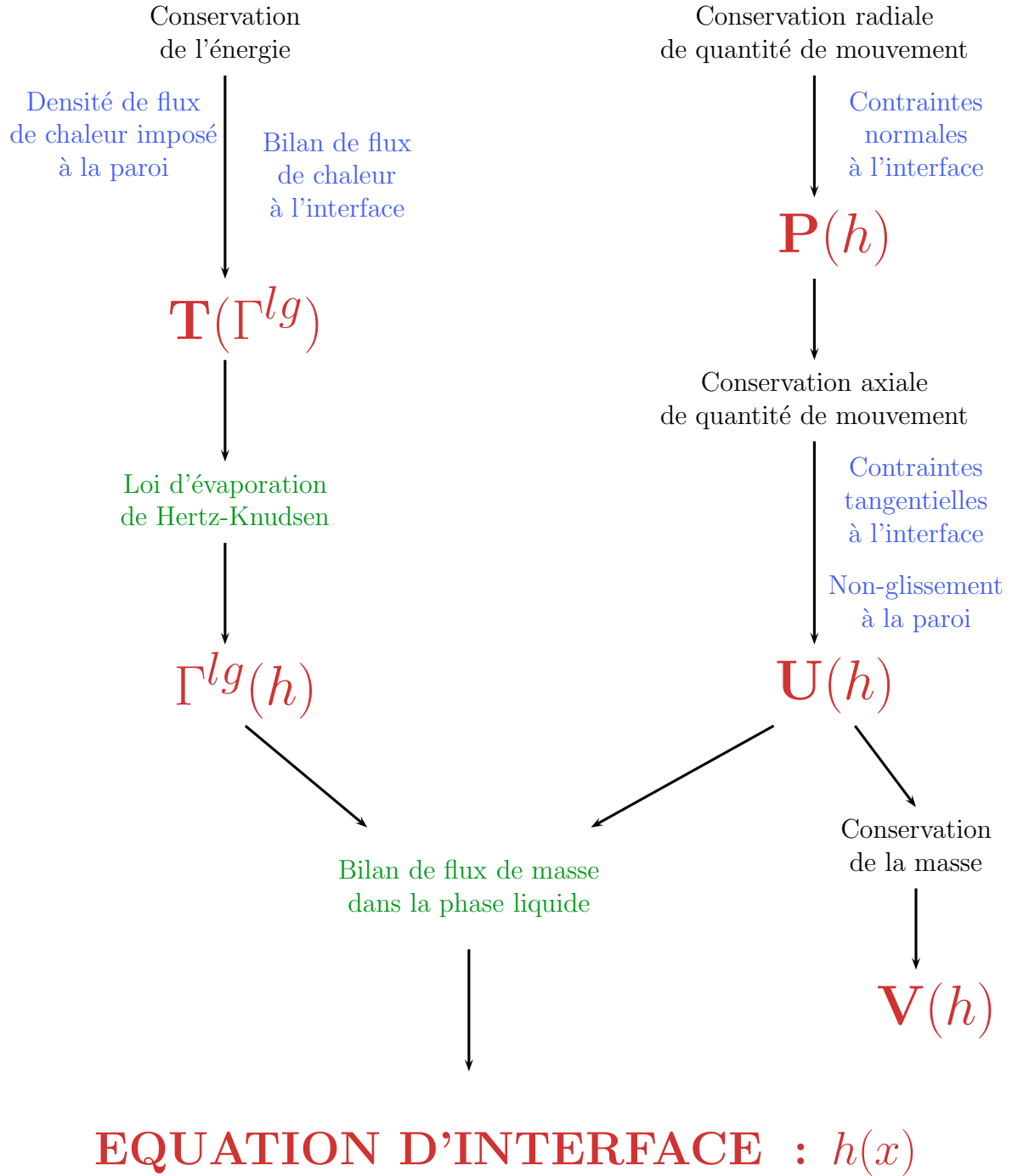


Figure 3.2: Procédure d'obtention de l'équation d'interface pour les régions du film et de transition. Noir : équations de Navier-Stokes. Bleu : conditions aux limites. Vert : lois de fermeture. Rouge : inconnues du modèle.

De son côté, la projection axiale de la conservation de la quantité de mouvement, simplifiée à n'importe quel ordre de perturbation, présente une relation entre le champ de pression (connu grâce au paragraphe précédent), et la composante axiale du champ de vitesse,  $U^{[ij]}$ . De ce champ de vitesse axiale peuvent être obtenues, non-seulement la composante radiale du champ de vitesse grâce à l'équation de conservation de la masse, mais aussi la densité de flux de masse dans la phase liquide dans les régions du film et de transition.

Le bilan de flux de masse dans le liquide est directement lié à la densité de flux de masse évaporée. Celle-ci est d'autre part exprimée d'une autre manière, par la résolution très simple de l'équation de conservation de l'énergie, couplée à la loi d'évaporation de Hertz-Knudsen reliant le champ de température à la densité de flux de masse évaporée. Ces deux expressions sont couplées pour fournir l'équation d'interface portant uniquement sur la hauteur  $h^{[ij]}$ , en fonction de laquelle sont exprimées toutes les autres inconnues des modèles.

Les modèles, simplifiés pour chaque ordres de perturbation, associés aux régions du film et de transition, sont présentés de manière détaillée dans l'annexe E.

## 3.5 Raccordement

Maintenant que sont obtenues et résolues numériquement les équations d'interface des différentes régions du modèle à n'importe quel ordre de perturbation, il reste encore à relier ces régions entre elles. Il faut à présent déterminer les longueurs arbitraires (notées  $l_0$ ,  $l_1$  et  $L_1$  dans la figure ??) représentant les distances entre les différentes régions de résolution. Ces conditions de raccordement aident aussi à déterminer les grandeurs physiques pour lesquelles il manque certaines conditions aux limites, comme par exemple le saut de pression dans les deux régions de ménisques.

### 3.5.1 Entre le ménisque avant et la transition

L'utilité de la région de transition, où les forces visqueuses et capillaires sont supposées équivalentes, a déjà été évoquée. Le saut de pression  $\Phi_1$ , constant à l'interface liquide-vapeur dans le ménisque, ainsi que la distance  $l_0$ , entre le début de la bulle et le début du film déposé, sont deux grandeurs qui ne peuvent être définies par la seule résolution du modèle du ménisque. Une condition de raccordement doit être définie entre  $h_1$  et  $h_2$ , les hauteurs de liquide dans le ménisque et la zone de transition, respectivement.

La technique utilisée pour relier ces deux hauteurs entre elles est un raccordement asymptotique, c'est-à-dire que les conditions de continuité ne sont pas imposées uniquement en un point, mais sur toute une zone du domaine de définition. En effet, à cause de la différence importante entre les longueurs caractéristiques des deux régions, il n'est

pas possible de définir exactement une abscisse en deçà de laquelle le modèle de transition s'appliquerait, et au-delà de laquelle le modèle du ménisque prendrait effet immédiatement. En revanche, le raccordement s'effectue ici pour des  $x_2$  grands et des  $x_1$  proches de  $-l_0$  :

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} \left( 1 - Ca^{2/3} h_2(x_2) \right) = \lim_{x_1 \rightarrow -l_0} h_1(x_1) \quad (3.39)$$

Ce raccordement sera explicité dans la section 4.4 en fonction des résultats des différents problèmes, et permettra de déterminer non seulement la distance  $l_0$  et le saut de pression  $\Phi_1$ , mais également la hauteur de liquide déposée  $\delta$ , en particulier.

### 3.5.2 Entre la transition et le film de liquide

Le raccordement entre le film de liquide présent à la paroi et les deux régions de transition à l'avant et à l'arrière, est relativement simple, puisque la longueur de ce film est un paramètre initial du problème. De plus, il sera montré dans le chapitre 4 que le problème du film n'est fonction que d'une seule constante d'intégration,  $\delta$ , déjà déterminée par le raccord entre le ménisque avant et la région de transition. Cependant, la résolution du problème de transition, avant de pouvoir déterminer  $\delta$ , demande d'identifier un certain nombre de constantes d'intégration en  $x_2 = 0$ , qui peuvent être fournies par la solution du film, puisque celle-ci est déjà définie en  $x_3 = 0$ . Mais voilà le problème : la solution du film est elle aussi fonction de  $\delta$  !

La solution est ici de procéder par itération, en utilisant par exemple la méthode de la sécante. Il faut donc effectuer deux résolutions du problème de transition en utilisant comme conditions aux limites, en  $x_2 = 0$ , la solution du film mince avec deux valeurs de  $\delta$  arbitraires, puis appliquer la condition de raccordement avec la région du ménisque. Si la valeur arbitraire de  $\delta$  ne satisfait pas la condition de raccordement, il faut recommencer avec une valeur affinée de  $\delta$ , corrigée par les calculs précédents. Si cette méthode de détermination de  $\delta$  peut paraître rébarbative, le fait que tous ces calculs soient effectués par un logiciel de calcul formel atténue sensiblement la difficulté de la question, puisque le temps de calcul, pour une machine typique et un seul jeu de paramètres  $(U_m, \varphi_{in}, T_{sat})$ , est inférieur à la seconde.

Dans un cas isotherme, comme pour Bretherton [12], Park & Homsy [63] ou Ratulowski et Chang [67], le film mince est supposé d'épaisseur constante, il n'est pas besoin d'une résolution itérative, car l'équation d'interface de la zone de transition peut être rendue complètement indépendante de la hauteur  $\delta$ . Cependant, pour obtenir une solution non-triviale, il est nécessaire de perturber l'interface du film de liquide, en effectuant une étude asymptotique de l'équation d'interface proche du film de liquide.

Pour ce qui est du raccord à l'arrière du film déposé, quand aucune zone asséchée n'est prise en compte, aucune difficulté n'est à envisager. En effet, puisque  $\delta$  a été déterminée

dans la transition avant, le film mince est complètement défini, et la hauteur  $\delta'$  à la fin du film est connue directement après la connaissance de  $\delta$ . Cet état du film à l'abscisse  $x_4 = 0$  est suffisant pour résoudre complètement le modèle de la transition arrière.

### 3.5.3 Entre le ménisque arrière et la transition

Le raccordement entre les régions 4 et 5 est très similaire à celui établi entre les régions 1 et 2. Seulement, puisque la hauteur de liquide en  $x_5 = l_1$  est déjà connue, le raccordement asymptotique présenté précédemment est surdéterminé. Il est indispensable de définir une nouvelle inconnue pour que les régions à l'arrière de la bulle se raccordent correctement entre elles.

Toutes les études, expérimentales, numériques ou théoriques, à commencer par Bretherton [12], observent un ménisque arrière d'une bulle de Taylor présentant un rayon de courbure plus important que celui du ménisque avant. De plus, la résolution de l'équation d'interface portant sur  $h_4$  (section 6.1) va montrer que l'interface, avant d'aller se raccorder au ménisque arrière, présente des ondulations dues au passage d'une géométrie quasi-cylindrique de l'interface liquide-vapeur dans le film de liquide, à une géométrie quasi-sphérique, de rayon de courbure plus grand que le rayon du tube capillaire, dans le ménisque arrière. Ainsi il est évident que la longueur  $l_0$  de l'équation (3.39) entre les repères indicés 1 et 2, ne correspond pas à la longueur  $l_1$  entre les repères indicés 4 et 5, mais bien plutôt à une nouvelle longueur  $L_1$ , représentée sur la figure 3.1, paramétrant la distance axiale théorique de l'intersection entre le ménisque arrière et le mur.

Le raccordement asymptotique arrière est alors défini comme suit :

$$\lim_{x_4 \rightarrow +\infty} \left( 1 - Ca^{2/3} h_4(x_4) \right) = \lim_{x_5 \rightarrow -L_1} h_5(x_5) \quad (3.40)$$

Une nouvelle longueur inconnue,  $L_1$ , est donc introduite, et devra être déterminée par le raccordement des deux régions arrières, permettant de prendre en compte une courbure du ménisque arrière plus grande que le rayon du tube capillaire, et par la même occasion de ne pas surdéterminer le problème global.

## 3.6 Conclusion

L'ensemble de ce dont nous avons besoin pour analyser la dynamique et la thermique de la phase liquide entourant une bulle en déplacement est à présent mis en place. En utilisant l'expérience accumulée par les chercheurs dans ce domaine, concernant la modélisation d'une bulle complète, d'un ménisque anisotherme ou d'un film de liquide, nous avons pu mettre en place un modèle de l'ensemble du système bulle/liquide, dans un contexte

anisotherme. La seule limite de ce modèle (mais de taille), est l'absence de prise en compte de la dynamique de la ligne triple, dans le cas d'un assèchement de la paroi.

Ce modèle a été séparé, suivant les longueurs caractéristiques du film de liquide, en plusieurs sous-problèmes, qui peuvent être résolus indépendamment. Ces sous-modèles génèrent cependant des constantes d'intégration qui sont déterminées par les relations de raccordement entre les différents modèles.

Un développement en série de Taylor, utilisant  $Ca^{1/3}$  et  $Re$  comme paramètres de perturbation, permet de simplifier les modèles, ne prenant en compte, dans un premier temps, que les termes prépondérants. Les termes de moindre importance peuvent ensuite être ajoutés, aux ordres de perturbation supérieurs, ce qui permet d'évaluer l'importance de termes généralement laissés de côté dans les modélisations, comme par exemple les effets inertiels.

Dans la deuxième partie de ce mémoire sont exposés les résultats qui ont pu être tirés de ce modèle. Le chapitre 4 présente la résolution des modèles simplifiés de la partie avant de la bulle, nous permettant d'obtenir une corrélation originale portant sur la hauteur du film de liquide déposé. Le chapitre 5 présente la montée en ordre de ces mêmes modèles de la partie avant de la bulle, permettant d'obtenir des précisions sur les résultats du chapitre 4, ainsi que d'intéressantes perspectives.

Le chapitre 6 regroupe les résultats des modèles de la partie arrière de la bulle, d'abord dans le cas d'un ménisque remouillant un film de liquide d'épaisseur micrométrique, ensuite dans le cas d'une paroi asséchée, où seul persiste un film adsorbé.

Enfin, le chapitre 7 établit un modèle thermodynamique transitoire de la bulle vapeur, et utilise les résultats portant sur la phase liquide pour définir les caractéristiques thermodynamiques de l'interface liquide-vapeur.





## Partie II

## Résultats



# Chapitre 4

## Ménisque avant - Ordre principal

Le schéma du ménisque avant d'une bulle est reproduit sur la figure 4.1. L'ensemble est décomposé en trois régions, qui possèdent chacune un repère propre pour sa modélisation, ainsi que ses longueurs caractéristiques propres. Le repère  $(O_1, x_1, r_1)$  est placé au centre du capillaire et se déplace avec le ménisque. Le repère  $(O_2, x_2, r_2)$ , commun à chacune des régions 2 et 3, est placé contre la paroi, et se déplace également à la vitesse du ménisque. La hauteur du film de liquide, notée  $\delta$ , au niveau de ce dernier repère, est développée en série de Taylor en fonction de  $Ca^{1/3}$  et  $Re$ , ainsi que les autres inconnues du problème (cf. équation 3.23).

Le modèle de la zone 1 est celui du ménisque, exposé dans la section 2.4.2. Les modèles des régions 2 et 3 sont les modèles de transition et du film, décrits dans les sections 3.2.2 et 3.2.1, respectivement. À l'ordre principal, où seuls les termes prépondérants du modèle sont présents, il suffit de faire tendre  $Ca$  et  $Re$  vers zéro, ce qui nous amène à un saut de pression constant à l'interface liquide-vapeur dans le ménisque. Le modèle de transition s'approche quant à lui d'un modèle dit de lubrification anisotherme. Enfin, la zone du film de liquide voit s'évaporer un film au repos.

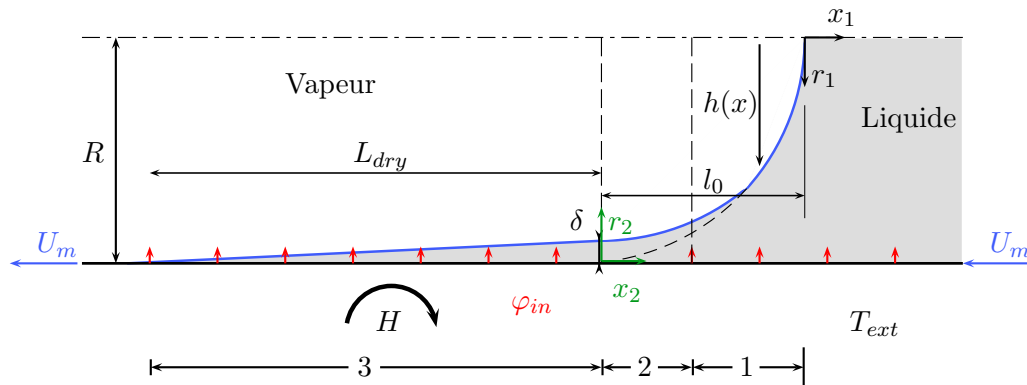


Figure 4.1: Schéma d'un ménisque reculant et déposant un film de liquide sur la paroi. Région 1 : ménisque ; Région 2 : transition ; Région 3 : film mince.

## 4.1 Forme du ménisque

Dans la zone du ménisque, la partie hydrodynamique des équations (2.29) impose une pression de liquide constante à l'ordre principal. Aucune information ne peut être obtenue pour le champ de vitesse à ce stade. Vue la forme des équations (2.29b) et (2.29c), les inconnues  $U_1^{[00]}$  et  $V_1^{[00]}$  ne pourront être déterminées qu'à partir du troisième ordre en  $Ca^{1/3}$ . Puisque le champ de pression  $P_1^{[00]}$  est uniforme, le saut de pression à travers l'interface liquide-vapeur  $\Phi_1^{[00]} = P_v - P_1^{[00]}$  est lui aussi constant, et le bilan des contraintes normales à l'interface liquide-vapeur (2.31a) devient :

$$\Phi_1^{[00]} + 1 = \frac{1}{h_1^{[00]} \left(1 + d_x h_1^{[00]2}\right)^{1/2}} - \frac{d_{x^2} h_1^{[00]}}{\left(1 + d_x h_1^{[00]2}\right)^{3/2}} = \text{Constante} \quad (4.1)$$

Ceci constitue simplement l'équation d'interface de la zone du ménisque à l'ordre de calcul principal. On applique à cette équation les conditions d'axisymétrie pour  $r = 0$  :

$$h_1^{[00]}(x_1) = 0 \quad \text{et} \quad d_x h_1^{[00]} \rightarrow -\infty \quad \text{quand} \quad x_1 = 0$$

L'équation (4.1) est la paramétrisation d'une sphère de rayon  $R_1$  et de centre ( $r_1 = 0$ ,  $x_1 = -R_1$ ) ayant pour expression :

$$h_1^{[00]}(x_1) = \left(R_1^2 - (x_1 + R_1^2)^2\right)^{1/2} \quad \text{avec} \quad R_1 = \frac{2}{\Phi_1^{[00]} + 1} \quad (4.2)$$

La valeur du rayon  $R_1$  sera déterminée à l'aide du raccordement asymptotique entre les régions du ménisque et de transition.

## 4.2 Le film mince

L'ordre principal du modèle de la zone du film de liquide déposé à la paroi débouche sur un problème dynamique très simple (voir annexe E.2.1). En effet la projection axiale (3.12a) de l'équation de conservation de la quantité de mouvement impose une dérivée seconde nulle suivant  $r$  de la vitesse axiale  $U_3^{[00]}$ . En faisant tendre le nombre capillaire vers zéro dans la composante tangentielle des contraintes dynamiques (3.14b), le seul terme restant impose à l'interface une dérivée nulle suivant  $r$  de  $U_3^{[00]}$ . La condition de non-glissement au mur (3.13a) implique donc dans le référentiel lié à cette zone 3 :

$$U_3^{[00]} = -1 \quad (4.3)$$

L'équation de conservation de la masse (3.11) ainsi que la condition de non pénétration à la paroi (3.13a) impose de plus ;

$$V_3^{[00]} = 0 \quad (4.4)$$

Le film de liquide est donc au repos à l'ordre principal, ce qui finalement est consistant avec l'utilisation du terme *film déposé* dans la définition de cette zone depuis le commencement de ce mémoire. Puisque ce problème dynamique est couplé à un problème thermique, le flux d'évaporation sera uniquement contrôlé par la conduction dans le liquide, et l'épaisseur du film va se réduire au fur et à mesure que l'on s'éloigne du ménisque.

Le problème thermique, quant à lui, s'exprime comme suit :

$$\partial_{r_2} T_3^{[00]} = 0 \quad (4.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial_r T_3^{[00]} + 1 &= Bi_m T_3^{[00]} \quad \text{quand} \quad r_3 = 0 \\ -\partial_r T_3^{[00]} &= \Gamma^{lg}_3^{[00]} \quad \text{quand} \quad r_3 = h_3^{[00]} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

La résolution de ce problème donne :

$$T_3^{[00]} = -\Gamma^{lg}_3^{[00]} r + \frac{1}{Bi_m} \left( 1 - \Gamma^{lg}_3^{[00]} \right) \quad (4.7)$$

L'utilisation de la loi de Hertz-Knudsen dimensionnée dans la zone 3 (3.16) et donnant l'expression du flux d'évaporation dans le film suivant la température d'interface  $T_3^{[00]}(h_3^{[00]})$  permet d'exprimer ce flux d'évaporation en fonction de la hauteur de liquide et des paramètres du problème :

$$\Gamma^{lg}_3^{[00]} = \frac{\beta_a}{\beta_b + Bi_m h_3^{[00]}} \quad (4.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{avec} \quad \beta_a &= 1 - Bi_m T_{sat} \\ \text{et} \quad \beta_b &= 1 + Bi_m K \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Il peut être utile de s'arrêter quelques instants sur le paramètre  $\beta_a$ , qui s'écrit de manière dimensionnée :

$$\beta_a = 1 - \frac{H R}{\lambda} Ca^{2/3} (T_{sat} - T_{ext}) \frac{\lambda}{\varphi_{in} R} Ca^{-2/3} = 1 - H \frac{T_{sat} - T_{ext}}{\varphi_{in}} \quad (4.10)$$

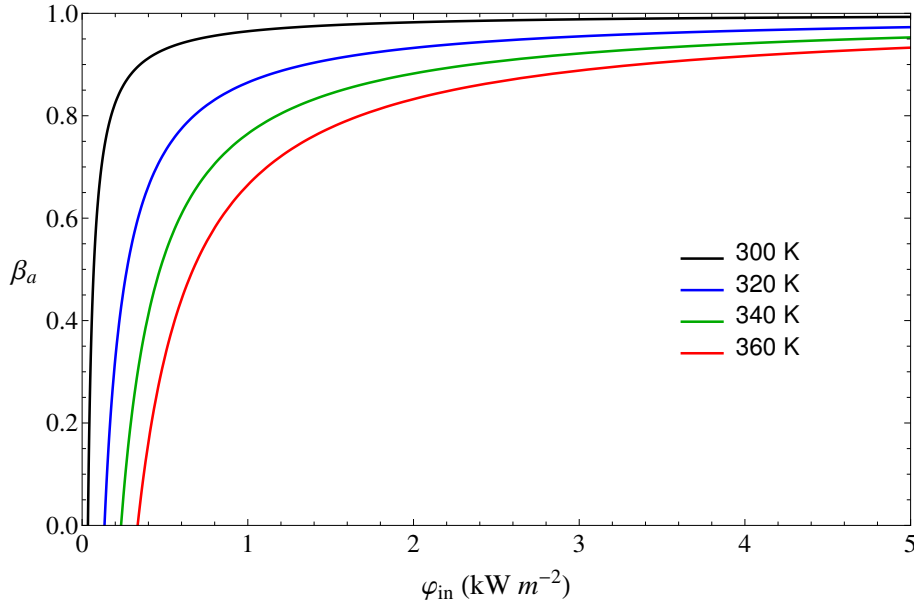


Figure 4.2: Variations du coefficient  $\beta_a$  en fonction de la densité de flux de chaleur imposée, pour différentes valeurs de température de saturation de la phase vapeur. Eau ( $T_{ext} = 293$  K).

Ce paramètre se comporte donc comme l'inverse de la densité de flux imposée à la paroi. Ainsi, si  $\beta_a$  tend vers l'unité rapidement à cause de la différence de température ( $T_{sat} - T_{ext}$ ) relativement faible par rapport aux valeurs de densité de flux de chaleur considérées, il peut malgré tout devenir négatif pour des densités de flux assez faibles, typiquement de l'ordre de quelques centaines de Watts par mètre carré, et donc engendrer des densités de flux de masse négatives. Ceci s'explique par la différence entre la température de la bulle et la température ambiante à l'extérieur, plus faible. Sans aucune densité de flux de chaleur imposée à la paroi, un transfert thermique s'effectue donc de l'intérieur vers l'extérieur. Cette déperdition doit d'abord être équilibrée par le chargement thermique à la paroi avant de pouvoir chauffer la bulle de vapeur.

Une condensation de la bulle de vapeur sur le film de liquide n'est pas correctement prise en compte par le modèle tel qu'il est écrit dans ce mémoire. Il faut donc, pour que nos résultats soient interprétables, que le couple de paramètre  $(\varphi_{in}, T_{sat})$  satisfasse la condition suivante :

$$\varphi_{in} > H (T_{sat} - T_{ext}) \quad (4.11)$$

La figure 4.2 montre bien qu'une température de saturation de la phase vapeur importante entraîne une diminution du coefficient  $\beta_a$  plus rapide, ainsi qu'un critère de validité du modèle sur la densité de flux de chaleur imposée important. Cependant, ce critère reste peu contraignant, puisque des contraintes thermiques inférieures au kiloWatt par mètre carré sont très inférieures à ce qui est couramment observé dans un caloduc oscillant.

Ayant à présent le champ de vitesse et le flux d'évaporation, l'équation d'interface est obtenue par l'utilisation du bilan de masse (3.15b) écrit à l'ordre principal :

$$-d_x \left( \int_0^{h_3^{[00]}} U_3^{[00]} dr \right) = E_f \Gamma_3^{lg[00]}(x) \quad (4.12)$$

C'est-à-dire :

$$d_x h_3^{[00]} = \frac{E_f \beta_a}{\beta_b + Bi_m h_3^{[00]}} \quad (4.13)$$

La condition aux limites utilisée pour la résolution de cette équation est la hauteur de liquide en  $x_3 = 0$ , exprimée à l'ordre principal et notée  $\delta^{[00]}$ , qui pour l'instant n'est pas connue, mais sera déterminée plus loin par le raccordement entre le ménisque et la zone de transition. L'expression du profil de l'interface est donc :

$$h_3^{[00]}(x_3) = \frac{1}{Bi_m} \left( -\beta_b + \sqrt{(\beta_b + Bi_m \delta^{[00]})^2 + 2Bi_m E_f \beta_a x_3} \right) \quad (4.14)$$

Ce profil sera utilisé pour la résolution de l'équation d'interface de la zone 2, pour assurer la continuité de cette interface entre les zones de résolution 2 et 3.

Il est important de remarquer que la courbure de l'interface à l'ordre principal, induite par la variation de hauteur du film de liquide, doit impliquer un saut de pression variable le long de l'interface liquide-vapeur. Or, d'après l'ordre principal de la projection normale des contraintes dynamiques à cette interface (3.14a), le saut de pression  $\Phi_3^{[00]}$  est nul dans toute la région du film de liquide (région 3). La contradiction n'est cependant qu'apparente, car la courbure du film déposé est très faible à cause des valeurs également très faibles des nombres d'évaporation et de Biot modifiés,  $E_f$  et  $Bi_m$ . Cette courbure n'aura d'impact sur  $\Phi$  qu'à partir du deuxième ordre en  $Ca^{1/3}$ . Le saut de pression induit par la courbure de l'interface liquide-vapeur est donc bien représenté par le modèle, mais à des ordres supérieurs en  $Ca^{1/3}$ .

L'évaporation du film de liquide déposé entraîne l'assèchement de celui-ci à plus ou moins brève échéance, suivant la hauteur initiale de film déposé  $\delta^{[00]}$ , du nombre d'évaporation  $E_f$  et des paramètres  $\beta_a$  et  $\beta_b$ , c'est-à-dire des caractéristiques physiques du fluide de travail, de la vitesse de déplacement du ménisque et de l'intensité du flux de chauffe. La longueur d'assèchement  $L_{dry}$  est définie positive et est simplement exprimée comme la valeur absolue de l'abscisse  $x_3$  où la hauteur de liquide est nulle. Gardons en mémoire que ce résultat n'est qu'une valeur approchée de la longueur d'assèchement, puisque le modèle ne prend pas en compte la pression de disjonction pouvant avoir un



effet important quand la hauteur de ce film devient faible.

$$L_{dry} = \frac{(\beta_b + Bi_m \delta^{[00]})^2 - \beta_b^2}{2Bi_m E_f \beta_a} \quad (4.15)$$

Cette dernière formule peut aussi s'écrire sous la forme :

$$L_{dry} = \frac{2\beta_b \delta^{[00]} + Bi_m \delta^{[00]2}}{2E_f \beta_a} \quad (4.16)$$

Si les valeurs de  $\delta^{[00]}$  ne varient pas de manière trop importante, il est possible de s'attendre à une variation forte de la longueur d'assèchement du film de liquide déposé par le ménisque, fonction de l'inverse de la grandeur  $E_f \beta_a$ . Le nombre d'évaporation  $E_f$  rend compte des variations de densité de flux imposée et de vitesse. Le paramètre  $\beta_a$ , quant à lui, rend compte des variations de température de saturation dans la phase vapeur. Ceci sera montré dans la partie 4.5.

### 4.3 La région de transition

Le problème dynamique dans la zone 2 à l'ordre [00], c'est-à-dire quand  $Ca^{1/3}$  et  $Re$  tendent vers 0, est le même qu'un problème simplifié par les hypothèses de lubrification. Rien de plus naturel puisque l'hypothèse de lubrification est adaptée à la modélisation de film de liquide d'épaisseur micrométrique où capillarité et viscosité sont d'égale importance. Il est utile de remarquer que les hypothèses qui permettent de modéliser cette zone dans le présent mémoire n'imposent nullement une condition sur la pente de l'interface, à l'opposé des hypothèses de lubrification. Puisque les longueurs caractéristiques de la zone de transition ont été définies pour assurer cette équivalence entre forces capillaire et visqueuse, faire tendre  $Ca^{1/3}$  vers zéro revient à écrire un problème dynamique de lubrification. Cependant, à aucun moment cette hypothèse n'est adoptée dans le modèle étudié ici. Une première simplification nous amène à écrire un problème identique, mais notre modèle ne se résout pas pour autant à cette étape de calcul, et est destiné à développer plus encore la résolution pour s'affranchir des limitations des hypothèses de lubrification.

Il est donc attendu d'obtenir une équation d'interface proche, au moins pour sa partie dynamique, de l'équation d'interface présentée par Bretherton [12] en 1961 :

$$d_{x^3} h = 3 \frac{h - \delta^{[00]}}{h^3} \quad (4.17)$$

Dans leur étude d'un ménisque soumis à une température de paroi constante supérieure à la température de saturation du système, Wilson *et al.* [88] ont, en plus d'utiliser les

hypothèses de lubrification, supposé que la différence de température entre la paroi et la saturation était suffisamment faible pour considérer une valeur très faible du nombre d'évaporation devant le nombre capillaire. Leur ménisque anisotherme est alors piloté par une équation d'interface identique à la formule dite isotherme de Bretherton, l'essentiel des transferts thermiques s'effectuant dans le film de liquide déposé. La valeur du nombre d'évaporation n'est pas contrainte dans notre modèle, et l'effet du problème thermique sur l'interface liquide-vapeur dans la zone de transition peut être important suivant la valeur du nombre d'évaporation. Nous étudierons plus loin cette sensibilité.

Le problème dynamique de la zone 2 peut s'écrire :

$$\partial_{r_2} U_2^{[00]} = \partial_x P_2^{[00]}, \quad \partial_r P_2^{[00]} = 0, \quad (4.18a, b)$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \begin{array}{ll} U_2^{[00]} = -1 & \text{quand } r_2 = 0 \\ \Phi_2^{[00]} = d_{x^2} h_2^{[00]}, \quad \partial_r U_2^{[00]} = 0 & \text{quand } r_2 = h_2^{[00]} \end{array} \right\} \quad (4.19)$$

Grâce à l'équation (4.18 b), il est possible de réécrire l'équation (4.18 a) donnant la composante axiale de la vitesse comme suit :

$$\partial_{r_2} U_2^{[00]} = -\partial_x \Phi_2^{[00]} = -d_{x^3} h_2^{[00]} \quad (4.20)$$

En utilisant les deux conditions aux limites (4.19), l'expression de  $U_2^{[00]}$  peut s'écrire :

$$U_2^{[00]} = -d_{x^3} h_2^{[00]} \left( \frac{1}{2} r_2^2 - h_2^{[00]} r_2 \right) - 1 \quad (4.21)$$

La densité de flux massique de liquide est régie par l'équation (3.21a), qui devient, écrite à l'ordre principal :

$$\Gamma_2^{[00]}(x) = \int_0^{h_2^{[00]}} U_2^{[00]}(r_2, x_2) dr_2 = \frac{1}{3} h_2^{[00]^3} d_{x^3} h_2^{[00]} - h_2^{[00]} \quad (4.22)$$

Le problème thermique à l'ordre [00] est identique au problème thermique du film mince présenté plus haut (section 4.2). Le flux de masse évaporée est donc de la forme :

$$\Gamma_{lg}^{[00]} = \frac{\beta_a}{\beta_b + Bi_m h_2^{[00]}} \quad (4.23)$$

Les paramètres  $\beta_a$  et  $\beta_b$  sont définis par l'équation (4.9). L'équation d'interface de la zone de transition à l'ordre principal est alors dérivée de l'équation (3.21b) simplifiée à l'ordre [00] :

$$-d_x \Gamma_2^{[00]}(x) = E_{tr} \Gamma_2^{lg[00]}(x) \quad (4.24)$$

C'est-à-dire :

$$-\frac{1}{3} d_x \left( h_2^{[00]^3} d_{x^3} h_2^{[00]} \right) + d_x h_2^{[00]} = \frac{E_{tr} \beta_a}{\beta_b + Bi_m h_2^{[00]}} \quad (4.25)$$

En supposant un problème isotherme, ou du moins sans évaporation à l'interface liquide-vapeur, c'est-à-dire quand le nombre d'évaporation  $E_{tr}$  tend vers zéro, le second membre de l'équation (4.25) s'annule. En supposant, de manière cohérente, un film de liquide déposé d'épaisseur constante, il est alors possible de retrouver l'équation de Bretherton.

Fortement non-linéaire, cette équation différentielle d'ordre quatre est résolue numériquement par un logiciel de calcul formel en partant des conditions aux limites en  $x_2 = 0$ , c'est-à-dire à la jonction entre les zones de transition et du film de liquide. Les quatre conditions aux limites indispensables pour résoudre cette équation sont donc :

$$h_2^{[00]}(0) = h_3^{[00]}(0) = \delta^{[00]} \quad (4.26a)$$

$$d_x h_2^{[00]}|_0 = d_x h_3^{[00]}|_0 = \frac{E_f \beta_a}{(\beta_b + Bi_m \delta^{[00]})} \quad (4.26b)$$

$$d_{x^2} h_2^{[00]}|_0 = d_{x^2} h_3^{[00]}|_0 = -\frac{Bi_m (E_f \beta_a)^2}{(\beta_b + Bi_m \delta^{[00]})^3} \quad (4.26c)$$

$$d_{x^3} h_2^{[00]}|_0 = d_{x^3} h_3^{[00]}|_0 = \frac{Bi_m^2 (E_f \beta_a)^3}{(\beta_b + Bi_m \delta^{[00]})^5} \quad (4.26d)$$

Toutefois  $\delta^{[00]}$  n'est pas encore connue. Le raccordement entre le ménisque et la transition dans la section suivante va permettre de formuler un critère sur cette hauteur, qu'il faudra ensuite approcher à l'aide de résolutions successives de l'équation (4.25) selon la méthode de la sécante. Pour des raisons de convergence et de limitations des erreurs numériques, il est nécessaire de commencer la résolution numérique à une hauteur de liquide indépendante de  $\delta^{[00]}$ . Il est donc indispensable d'effectuer le changement de variable suivant :

$$h_2^{[00]}(x_2) = \delta^{[00]} H_2^{[00]}(X) \quad \text{et} \quad x_2 + s = \delta^{[00]} X \quad (4.27)$$

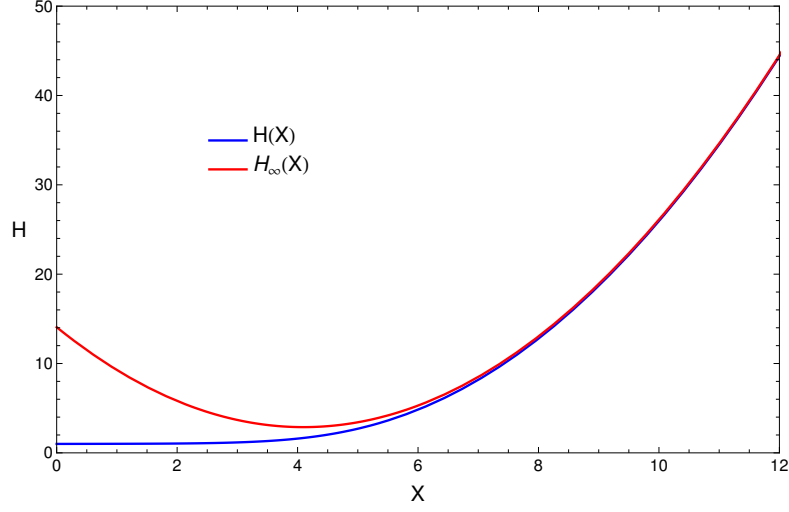


Figure 4.3: Fonction  $H(X)$  pour des paramètres quelconques, ainsi que son approximation quadratique pour des  $X$  grands.

La constante  $s$  est introduite pour assurer la consistance de la solution pour toute translation axiale, l'équation (4.25) étant invariante par translation. Elle pourra être déterminée par raccordement entre les régions 1 et 2 aux ordres supérieurs.

L'équation (4.25) devient donc :

$$-\frac{1}{3} d_X \left( H_2^{[00]3} d_{X^3} H_2^{[00]} \right) + d_X H_2^{[00]} = \frac{E_{tr} \beta_a}{\beta_b + Bi_m \delta^{[00]} H_2^{[00]}} \quad (4.28)$$

Avec les conditions aux limites :

$$H_2^{[00]}(0) = 1 \quad (4.29a)$$

$$d_X H_2^{[00]}|_0 = \frac{E_f \beta_a}{(\beta_b + Bi_m \delta^{[00]})} \quad (4.29b)$$

$$d_{X^2} H_2^{[00]}|_0 = -\frac{\delta^{[00]} Bi_m (E_f \beta_a)^2}{(\beta_b + Bi_m \delta^{[00]})^3} \quad (4.29c)$$

$$d_{X^3} H_2^{[00]}|_0 = \frac{(\delta^{[00]} Bi_m)^2 (E_f \beta_a)^3}{(\beta_b + Bi_m \delta^{[00]})^5} \quad (4.29d)$$

Une étude asymptotique de l'équation (4.28) pour de grandes valeurs de  $X$ , c'est-à-dire vers le ménisque, où  $H_2^{[00]}$  tend vers l'infini, est présentée dans l'annexe C. Il y est montré

que  $H_2^{[00]}$  peut être correctement approchée par une fonction quadratique quand  $X$  est assez élevé, comme représenté sur la figure 4.3. Il est alors possible d'écrire :

$$H_\infty(X) = \lim_{X \rightarrow +\infty} H_2^{[00]}(X) = A_0 + A_1 X + A_2 \frac{X^2}{2} + o(1) \quad (4.30)$$

et donc :

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} h_2^{[00]}(x_2) = \left( A_0 \delta^{[00]} + A_1 s + \frac{A_2 s^2}{2 \delta^{[00]}} \right) + \left( A_1 + \frac{A_2 s}{\delta^{[00]}} \right) x_2 + \frac{A_2}{\delta^{[00]}} \frac{x_2^2}{2} + o(1) \quad (4.31)$$

Le raccordement avec la zone du ménisque modélisée par l'équation (4.2) est donc envisageable.

## 4.4 Raccordement et détermination de $\delta^{[00]}$

Le raccordement entre le ménisque avant et la zone de transition 2 a été expliqué dans la section 3.5.1 et explicité par l'équation (3.39) qui est rappelée ici.

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} \left( 1 - Ca^{2/3} h_2(x_2) \right) = \lim_{x_1 \rightarrow -l_0} h_1(x_1) \quad (4.32)$$

Le membre à gauche de cette égalité est un polynôme fonction de  $x_2$  et de  $Ca^{1/3}$ , au moins pour l'ordre principal. Il faudra, pour tous les autres ordres, exprimer la fonction  $h_2^{[ij]}$  loin du film sous forme quadratique, pour pouvoir effectuer le raccordement correctement. Il faut donc exprimer le membre à droite de (4.32) sous forme d'un polynôme fonction de  $x_2$  et de  $Ca^{1/3}$ . La fonction  $h_1$  est développée en série de Taylor au voisinage de  $(-l_0)$  pour réaliser ce raccordement.

$$h_1(x_1) = h_1(-l_0) + (x_1 + l_0) d_x h_1 |_{-l_0} + \frac{(x_1 + l_0)^2}{2} d_{x^2} h_1 |_{-l_0} + o(1) \quad (4.33)$$

et, suivant la définition (3.5), il est possible d'écrire :

$$h_1(x_1) = h_1(-l_0) + x_2 Ca^{1/3} d_x h_1 |_{-l_0} + \frac{x_2^2}{2} Ca^{2/3} d_{x^2} h_1 |_{-l_0} + o(1) \quad (4.34)$$

En remplaçant la fonction  $h_1$  et ses dérivées par le développement suivant  $Ca^{1/3}$  et  $Re$  donné par l'équation (3.23), et en supposant toutes les corrections de  $h_2$ , aux ordres supérieurs en  $Re$  et  $Ca^{1/3}$ , quadratiques pour des grandes valeurs de  $X$ , l'équation (4.32) peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 1 - Ca^{2/3} \delta^{[00]} & \left( \begin{array}{c} (A_0 + A_1 X + \frac{A_2}{2} X^2) + Ca^{1/3} (B_0 + B_1 X + \frac{B_2}{2} X^2) + \frac{1}{2} Ca^{2/3} (D_0 + D_1 X + \frac{D_2}{2} X^2) + \dots \\ + Re (C_0 + C_1 X + \frac{C_2}{2} X^2) + Re Ca^{1/3} (E_0 + E_1 X + \frac{E_2}{2} X^2) + \dots \\ + \frac{1}{2} Re^2 (F_0 + F_1 X + \frac{F_2}{2} X^2) + \dots \\ + \dots \end{array} \right) = \\
 & \left( \begin{array}{c} h_1^{[00]} + Ca^{1/3} h_1^{[10]} + \frac{1}{2} Ca^{2/3} h_1^{[20]} + \dots \\ + Re h_1^{[01]} + Re Ca^{1/3} h_1^{[11]} + \dots \\ + \frac{1}{2} Re^2 h_1^{[02]} + \dots \\ + \dots \end{array} \right) + x_2 Ca^{1/3} \left( \begin{array}{c} d_x h_1^{[00]} + Ca^{1/3} d_x h_1^{[10]} + \frac{1}{2} Ca^{2/3} d_x h_1^{[20]} + \dots \\ + Re d_x h_1^{[01]} + Re Ca^{1/3} d_x h_1^{[11]} + \dots \\ + \frac{1}{2} Re^2 d_x h_1^{[02]} + \dots \\ + \dots \end{array} \right) \\
 & + \frac{x_2^2}{2} Ca^{2/3} \left( \begin{array}{c} d_{xx} h_1^{[00]} + Ca^{1/3} d_{xx} h_1^{[10]} + \frac{1}{2} Ca^{2/3} d_{xx} h_1^{[20]} + \dots \\ + Re d_{xx} h_1^{[01]} + Re Ca^{1/3} d_{xx} h_1^{[11]} + \dots \\ + \frac{1}{2} Re^2 d_{xx} h_1^{[02]} + \dots \\ + \dots \end{array} \right) \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

Il faut ensuite identifier terme à terme en fonction de  $x_2$ , de  $Ca^{1/3}$  et de  $Re$ , c'est-à-dire pour les premiers ordres en nombre capillaire :

A l'ordre  $Ca^0 Re^0$  :

$$h_1^{[00]}(-l_0) = 1 \quad (4.36)$$

A l'ordre  $Ca^{1/3} Re^0$  :

$$d_x h_1^{[00]}|_{-l_0} = 0 \quad (4.37a)$$

$$h_1^{[10]}(-l_0) = 0 \quad (4.37b)$$

A l'ordre  $Ca^{2/3} Re^0$  :

$$\frac{1}{2} d_{x^2} h_1^{[00]}|_{-l_0} = -\frac{A_2}{2\delta^{[00]}} \quad (4.38a)$$

$$d_x h_1^{[10]}|_{-l_0} = -\left(A_1 + \frac{A_2 s}{\delta^{[00]}}\right) \quad (4.38b)$$

$$h_1^{[20]}(-l_0) = -\left(A_0 \delta^{[00]} + A_1 s + \frac{A_2 s^2}{2\delta^{[00]}}\right) \quad (4.38c)$$

La constante  $s$  ne pourra être déterminée qu'en obtenant le profil d'interface de la zone 1 aux ordres supérieurs ; mais elle n'intervient pas à l'ordre principal. Puisque le profil

de l'interface liquide-vapeur dans la région du ménisque est donné par l'équation (4.2), il vient des conditions (4.36), (4.37a) et (4.38a) :

$$R_1 \left( 1 - \left( 1 - \frac{l_0}{R_1} \right)^2 \right)^{1/2} = 1 \quad (4.39a)$$

$$\left( \frac{l_0}{R_1} - 1 \right) \left( 1 - \left( 1 - \frac{l_0}{R_1} \right)^2 \right)^{-1/2} = 0 \quad (4.39b)$$

$$-\frac{1}{R_1} \left( 1 - \left( 1 - \frac{l_0}{R_1} \right)^2 \right)^{-3/2} = -\frac{A_2}{\delta^{[00]}} \quad (4.39c)$$

Des deux premières conditions (4.39a) et (4.39b), il est évident que :

$$l_0 = R_1 = 1 \quad (4.40)$$

Le ménisque assume donc à l'ordre principal une forme hémisphérique ayant pour rayon le rayon du capillaire dans lequel il se déplace. Incidemment ce résultat justifie la présence de la zone de transition, puisque un ménisque de rayon adimensionné égal à 1 ne pourrait en l'état déposer de film de liquide d'épaisseur finie à la paroi. Pour modéliser ce film, il est nécessaire de prendre en compte la compétition entre les forces capillaires et visqueuses en proche paroi, ce qui est effectué dans la zone de transition.

Dans ces conditions, la troisième condition (4.39c) devient :

$$\delta^{[00]} = A_2 \quad (4.41)$$

Il existe donc une correspondance entre la dérivée seconde du profil de l'interface liquide-vapeur près du ménisque et la hauteur initiale de liquide déposée à la paroi par ce ménisque.

## 4.5 Résultats et analyses

Grâce au critère (4.41), il est à présent possible de déterminer la valeur de la hauteur  $\delta^{[00]}$  pour tout jeu de paramètres tels que le fluide de travail, la densité de flux de chauffe, la vitesse du ménisque ou encore la température de saturation de la bulle.

Les valeurs de  $\delta^{[00]}$  calculées pour de l'eau sur une plage de vitesse de ménisque allant de 0.01 à 0.1 m.s<sup>-1</sup>, des densités de flux de chaleur imposées allant de 1 à 20 kW.m<sup>-2</sup>

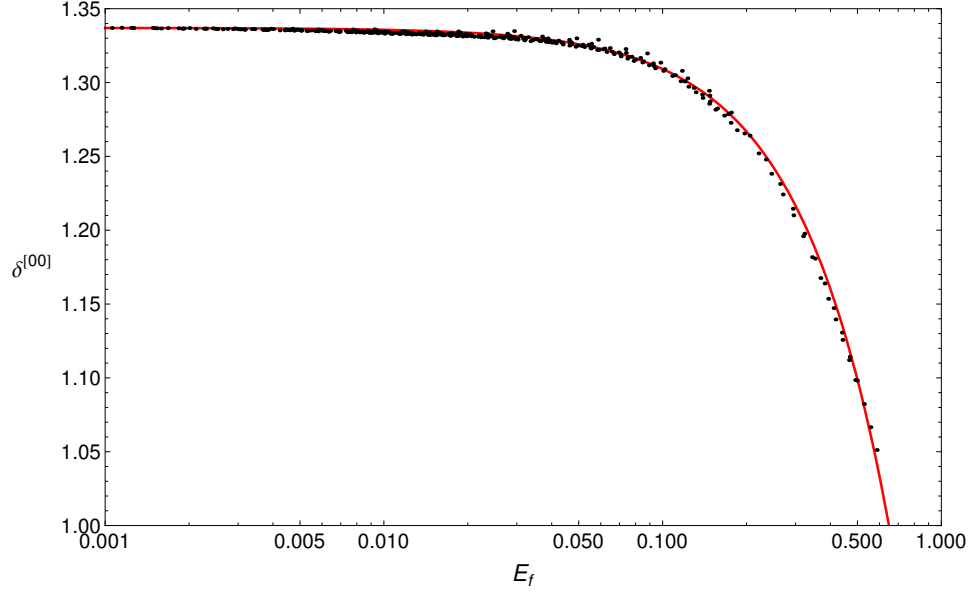


Figure 4.4: Evolution de la hauteur de liquide déposée en fonction du nombre d'évaporation. Points : valeurs calculées; courbe : corrélation (4.44).

ainsi que des températures de saturation comprises entre 330 et 370 K sont représentées sur la figure 4.4, en fonction du nombre d'évaporation modifié  $E_f$  lié à la région du film de liquide. Pour des fluides différents comme le n-pentane ou l'éthanol, les mêmes calculs ne montrent pas de différences avec ceux obtenus pour l'eau, sur des plages de températures de saturation adaptées. Une corrélation approximant ces valeurs, elle aussi représentée sur la figure 4.4, présente l'expression suivante :

$$\delta^{[00]} = 1.337 - 0.6 E_f^{4/3} \quad (4.42)$$

L'expression dimensionnelle de la hauteur de liquide initialement déposée à l'ordre principal est notée  $\delta_0$ , exprimée en mètre et est liée à la grandeur  $\delta^{[00]}$  par la relation :

$$\delta_0 = R Ca^{2/3} \delta^{[00]} \quad (4.43)$$

D'après la définition (3.8) du nombre d'évaporation modifié dans la région du film de liquide, la corrélation (4.42) peut se réécrire sous la forme :

$$\delta_0 = 1.337 R Ca^{2/3} - 0.6 R Ca^{-2/9} E^{4/3} \quad (4.44)$$

Pour de faibles valeurs de densité de flux de chaleur imposée à la paroi ( $E \rightarrow 0$ ), les valeurs calculées ainsi que la corrélation sont proches du cas isotherme calculé pour la première fois par Bretherton [12] ( $\delta_0 = 1.337 R Ca^{2/3}$ ). L'équation (4.16) donnant la



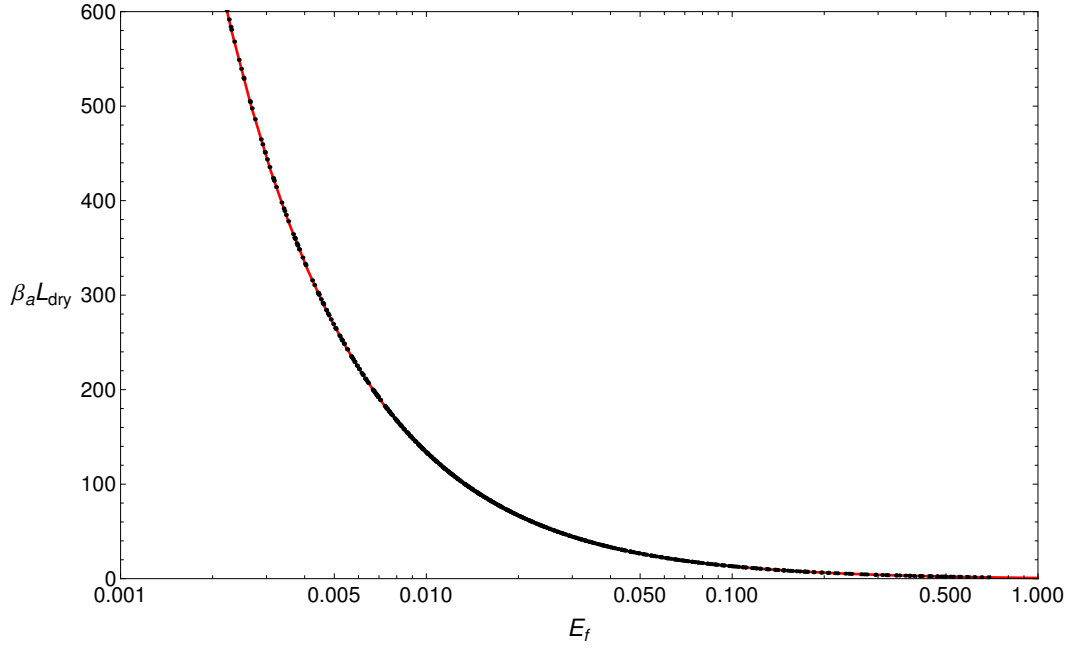


Figure 4.5: Evolution de la longueur d'assèchement du film déposé en fonction du nombre d'évaporation.

relation entre la hauteur du film de liquide déposé  $\delta^{[00]}$  et la longueur d'assèchement de ce film,  $L_{dry}$ , est rappelée ici :

$$2 E_f \beta_a L_{dry} = 2 \beta_b \delta^{[00]} + Bi_m \delta^{[00]2} \quad (4.45)$$

Même pour une épaisseur de film de liquide micrométrique, la résistance d'interface est négligeable devant la résistance thermique de conduction de ce film. Puisque ce modèle ne prend pas en compte la pression de disjonction et ne peut donc prétendre modéliser précisément le comportement du film de liquide pour des épaisseurs inférieures à quelques centaines de nanomètres, il est possible de considérer le paramètre  $\beta_b$  comme étant très proche de 1. De plus, la valeur du nombre de Biot modifié est très faible devant 1, ce qui permet d'obtenir une seconde corrélation portant sur la longueur du film de liquide déposé par un ménisque reculant avant de s'évaporer :

$$L_{dry} = \frac{1}{\beta_a} \left( 1.337 E_f^{-1} - 0.6 E_f^{1/3} \right) \quad (4.46)$$

Le nombre d'évaporation modifié  $E_f$  ne prend en compte les effets de la température de saturation du système qu'à travers les variations des propriétés thermophysiques du fluide telles que la masse volumique ou la viscosité de la phase liquide. La véritable prise en compte de la valeur de la température de saturation est effectuée à travers le terme  $\beta_a$ , qui ne rentre pas dans la définition de la corrélation (4.42), mais corrige par contre efficacement

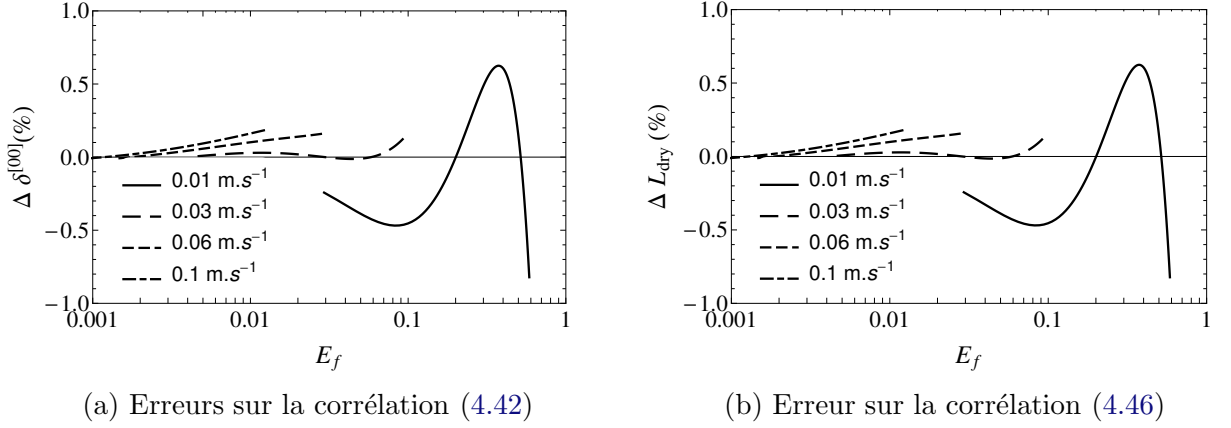


Figure 4.6: Ecart entre les corrélations (4.42) et (4.46) et les valeurs numériques calculées. Eau à  $T_{sat} = 350K$ .

les valeurs de la longueur d'assèchement du film de liquide, comme montré par la figure 4.5. La correction apportée par le paramètre  $\beta_a$  s'atténue pour des flux de chaleur importants et donc des nombres d'évaporation grands, puisque  $\beta_a$  tend rapidement vers 1 quand  $\varphi_{in}$  augmente. Ainsi, la valeur de la température de saturation n'aura véritablement d'effet sur la forme du film de liquide déposé par un ménisque reculant que pour des nombres d'évaporation faibles, c'est-à-dire de petites densités de flux de chaleur imposées et/ou des vitesses de ménisques importantes.

La densité de flux de chaleur imposée à la paroi et la vitesse du ménisque ont des effets antagoniques sur la thermodynamique du film de liquide. La vitesse du ménisque tend avec la viscosité du liquide à étirer le film déposé et à augmenter son épaisseur. La densité de flux de chaleur imposée à la paroi engendre, quant à elle, le flux de masse évaporée à l'interface liquide-vapeur réduisant la hauteur de ce film et augmentant la vitesse de son assèchement. Le nombre d'évaporation représente bien cette compétition puisqu'il est défini par le rapport de ces deux paramètres. Quand ce nombre d'évaporation est faible, c'est l'effet visqueux du fluide qui l'emporte et la vitesse du ménisque devient le paramètre prépondérant, entraînant une variation de hauteur faible et des longueurs de film importantes. L'influence de la densité de flux de chaleur imposée commence à se faire sentir sur la hauteur initiale de film quand  $E_f \approx 0.1$  et, de ce moment, la compétition entre vitesse et densité de flux devient plus compliquée à modéliser à travers le seul rapport de ces deux grandeurs.

Si les valeurs et la corrélation de longueurs d'assèchement du film de liquide semblent s'accorder convenablement, cela vient de la correction apportée par la prise en compte de la température de saturation du système à travers le paramètre  $\beta_a$ , mais aussi à cause de la faible variation de  $L_{dry}$  pour des nombres d'évaporation élevés qui masquent les déviations des valeurs calculées avec la corrélation. En effet, l'erreur entre chacune des deux corrélations et les valeurs numériques calculées présente des variations absolument identiques, aussi bien pour la hauteur de liquide initiale que pour la longueur d'assèchement.

Ceci est représenté sur la figure 4.6. Ces erreurs sont inférieures au pourcent sur une grande plage de nombre d'évaporation, et sont notables uniquement pour des valeurs de nombre d'évaporation modifié  $E_f > 0.6$ .

Des nombres d'évaporation aussi grands, pour qu'ils soient physiquement acceptables, supposent des vitesses de ménisques faibles et des densités de flux de chaleur imposées relativement importantes. À titre d'exemple, un ménisque d'eau se déplaçant à  $1 \text{ cm.s}^{-1}$  devra être chauffé par une densité de flux d'au moins  $20 \text{ kW.m}^{-2}$  pour atteindre une valeur de  $E_f$  supérieure à 0.6. Pour d'autres fluides comme le n-pentane, qui possède une chaleur latente de vaporisation plus faible que celle de l'eau, la divergence entre les valeurs calculées numériquement et la corrélation a lieu pour des valeurs de densité de flux moins importantes, mais quoi qu'il en soit les niveaux de vitesse et la contrainte thermique imposée à la bulle quand  $E_f > 0.6$  implique l'évaporation très rapide du film de liquide, puisque les longueurs d'assèchement à ces niveaux de nombre d'évaporation sont de l'ordre du millimètre.

## 4.6 Champ de température dans le bouchon liquide

Le problème thermique à l'ordre principal dans la région du ménisque suppose la résolution de l'équation de Laplace associée à des conditions aux limites particulières, puisque combinant des conditions cylindriques à la paroi et sphériques à l'interface liquide-vapeur (cf. figure 4.7). Parmi les nombreuses méthodes existantes pour la résolution d'équations différentielles telles que l'équation de Laplace, la méthode de séparation des variables utilisant une définition discrète de l'espace des valeurs propres et de la base associée sur laquelle la solution est projetée est la plus simple et parvient à fournir une solution convergente du problème thermique à l'ordre principal dans le bouchon de liquide. En revanche, cette définition discrète de l'espace des valeurs propres entrainera des solutions

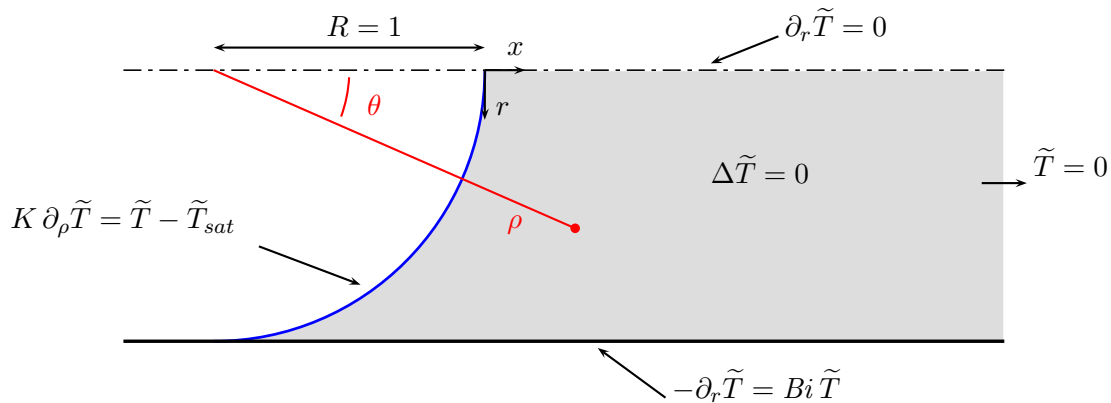


Figure 4.7: Problème complet associé au champ de température  $\tilde{T}$  dans le bouchon de liquide.

divergentes aux ordres de calcul supérieurs, et un espace continu de valeurs propres devra être défini pour obtenir une solution satisfaisante à ces problèmes. Ceci implique des intégrales infinies très difficiles à évaluer numériquement avec une précision suffisante. Tous ces problèmes sont détaillés et expliqués dans l'annexe D.

Pour l'instant, le problème reste relativement simple. Deux températures modifiées sont définies :

$$\tilde{T} = T_1^{[00]} - \frac{1}{Bi} \quad (4.47a)$$

$$\tilde{T}_{sat} = T_{sat} - \frac{1}{Bi} \quad (4.47b)$$

Le problème thermique ainsi obtenu à l'ordre principal dans le bouchon est résumé par la figure 4.7, et l'annexe D.2 fournit la procédure de résolution de ce problème. Le champ de température est de la forme :

$$\tilde{T}(r, x) = \sum_{i=1}^{+\infty} A_i J_0(\lambda_i r) e^{\lambda_i (x+1)} \quad (4.48)$$

Un nombre  $m$  suffisant de coefficients  $A_i$  est déterminé grâce à la relation :

$$A_i = \sum_{j=1}^m b_{ij} \tilde{T}_{sat} \quad (4.49)$$

La matrice  $[b_{ij}]$  est l'inverse de la matrice  $[a_{ji}]$  dont les coefficients sont définis comme suit :

$$a_{ji} = e^{-\lambda_i \cos(\theta_j)} ((1 + \lambda_i K \cos(\theta_j)) J_0(\lambda_i \sin(\theta_j)) + \lambda_i K \sin(\theta_j) J_1(\lambda_i \sin(\theta_j))) \quad (4.50)$$

Les angles  $\theta_j$  proviennent de la discrétisation de l'arc de cercle  $[0, \pi/2]$  correspondant au ménisque hémisphérique. Il est intéressant de remarquer que la résistance d'interface adimensionnée  $K$  n'est fonction que de la température de saturation du système. La matrice  $[a_{ji}]$  n'est donc pas influencée par la densité de flux de chaleur imposée à la paroi, qui n'entre en considération que dans la température de saturation sans dimension  $\tilde{T}_{sat}$ .

A titre d'exemple, la figure 4.8 représente le champ de température qu'il est ainsi possible de calculer, pour une densité de flux de chaleur et une température de saturation imposées. L'ordre principal du développement en fonction de  $Ca^{1/3}$  et  $Re$  revient finalement à considérer dans le bouchon de liquide uniquement la conduction de la chaleur de

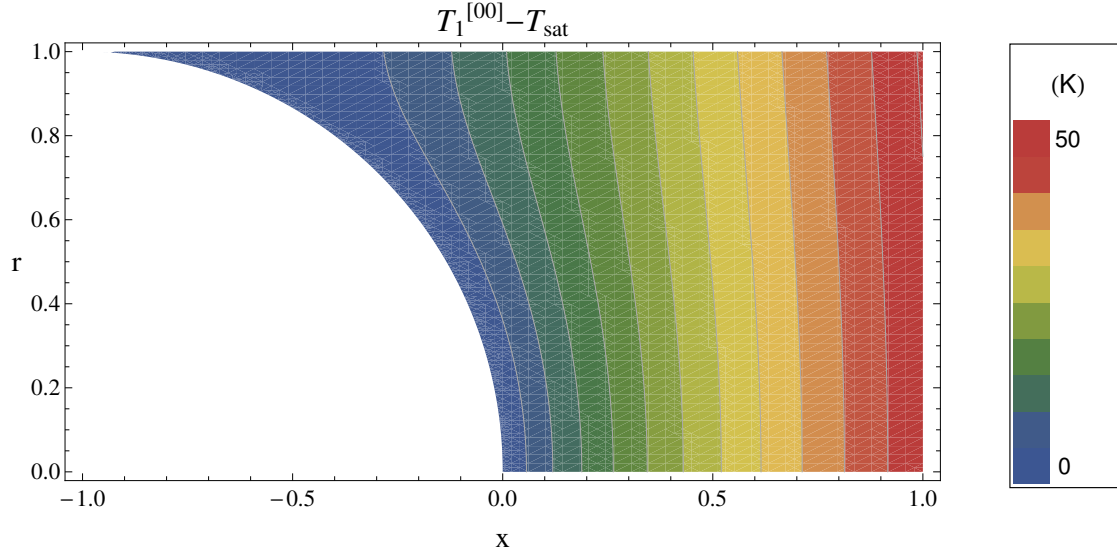


Figure 4.8: Champ de température dans le bouchon de liquide à l'ordre principal suivant  $Ca^{1/3}$  et  $Re$ . Eau,  $\varphi_{in} = 2 \text{ kW.m}^{-2}$  et  $T_{sat} = 330 \text{ K}$ .

la paroi vers le centre de la conduite. Les perturbations du champ de température dues au transport advectif de la chaleur lié à un champ de vitesse particulier dans le bouchon de liquide ne pourront être obtenues qu'aux ordres supérieurs.

La figure 4.8 donne l'impression que la température du bouchon de liquide est égale à la température de saturation près de l'interface liquide-vapeur, à cause de l'augmentation importante de la différence  $(T_1^{[00]} - T_{sat})$  avec l'abscisse  $x$ . En réalité, du fait de la faible résistance thermique d'interface  $K$ , une très faible différence entre la température de la phase liquide au niveau de l'interface du ménisque et la température de saturation peut générer malgré tout des densités de flux de masse évaporées non négligeables.

D'ailleurs, la partie la plus intéressante de ce calcul réside dans l'obtention du profil de la densité de flux de masse évaporée à l'interface  $\Gamma_1^{lg[00]}$ , qui permettra par la suite de fermer le problème dynamique et de calculer le champs de vitesse  $(U_1^{[00]}, V_1^{[00]})$  dans le bouchon de liquide. Ce calcul ne pourra être entrepris qu'à l'ordre 3 en fonction de  $Ca^{1/3}$ , et sera abordé plus loin. La figure 4.9 représente les variations radiales de cette densité de flux de masse évaporée à l'interface liquide-vapeur d'un ménisque reculant pour différentes densités de flux de chaleur imposées.

Cette figure montre que la densité de flux de masse évaporée d'eau à l'interface liquide-vapeur d'un ménisque sphérique peut être non négligeable, en particulier au centre de la conduite, ce qui n'est pas intuitif *a priori*. En reculant dans un fluide chauffé fortement et en régime permanent, donc possédant une température supérieure à la température de saturation, le ménisque rend le chemin thermique favorable vers le centre du tube capillaire, augmentant ainsi le gradient axial de température dans le bouchon de liquide, donc la densité de flux de chaleur à l'interface liquide-vapeur, et ainsi la densité de flux

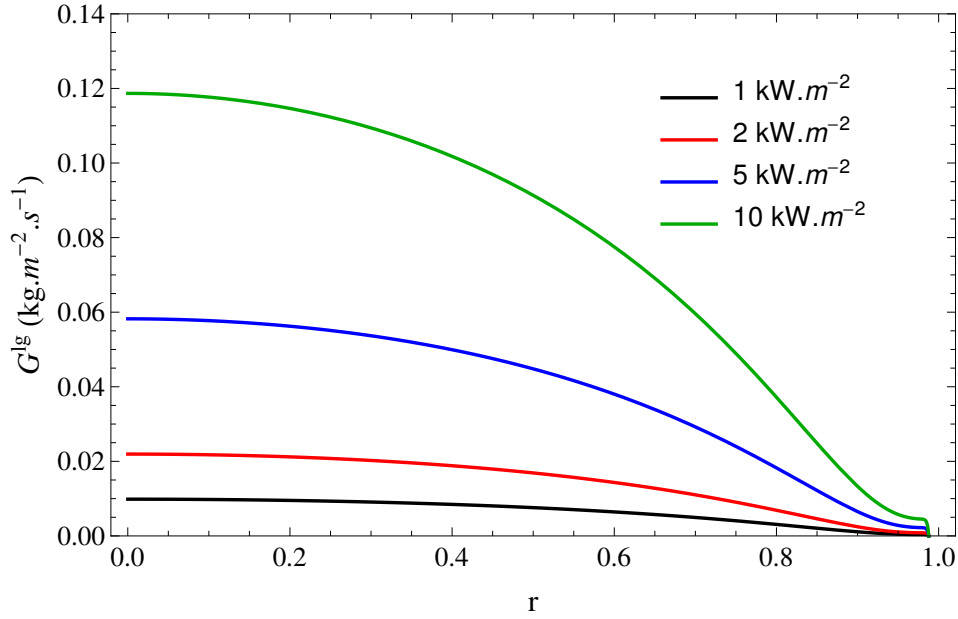


Figure 4.9: Evolution radiale de la densité de flux de masse évaporée pour l'eau avec  $T_{sat} = 330$  K. (L'effet de la température de saturation est négligeable.)

de masse évaporée.

Bien sûr ces résultats montrant une évaporation importante au centre d'un ménisque reculant ne représentent que partiellement la réalité, puisque ne sont pas pris en compte ici les effets advectifs dus au champ de vitesse dans le bouchon de liquide en avant du ménisque. En atténuant les gradients de température au centre du tube capillaire par les recirculations qui semblent avoir lieu devant un ménisque reculant (voir par exemple [36]), la densité réelle de flux de masse évaporée sera sans doute plus faible que celle calculée ici en première approximation. Cependant, ces résultats poussent malgré tout à relativiser l'approximation généralement adoptée d'une évaporation négligeable dans un ménisque sphérique.

## 4.7 Conclusion

Deux résultats importants, obtenus dans ce chapitre, sont à retenir. Tout d'abord, la prise en compte des échanges de chaleur dans la région de transition, juste avant le film de liquide, a permis la définition d'une corrélation portant sur la hauteur du film déposé par un ménisque reculant. Cette corrélation prend non seulement en compte la vitesse de ce ménisque, mais aussi la densité de flux de chaleur imposée à la paroi, à travers le nombre d'évaporation  $E$ . Elle tend vers la corrélation de Bretherton, donnant la hauteur du film déposé par un ménisque isotherme, quand le chargement thermique est faible.

Le deuxième résultat important est le calcul du champ de température dans la région

du ménisque. À l'ordre principal, ce champ de température ne prend en compte que la conduction de la chaleur, de la paroi vers le liquide. Le transport advectif de la chaleur, assuré par le champ de vitesse, ne pourra être pris en compte qu'à partir du premier ordre de perturbation suivant  $Re$ . Cependant, ce champ de vitesse dans le bouchon de liquide n'a pas pu être déterminé à l'ordre de calcul principal, les équations de conservation simplifiées à l'ordre principal ne définissant qu'un champ de pression constant.

Le chapitre suivant pourra compléter les résultats présentés ici, en montant en ordre dans le développement suivant  $Ca^{1/3}$  et  $Re$ . Nous attendons en particulier une estimation plus précise de la hauteur du film de liquide déposé.

# Chapitre 5

## Ménisque avant - Montée en ordre

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux corrections qu'il est possible d'apporter aux différents modèles décrivant l'ensemble de la partie avant de la bulle. Ces corrections sont effectuées en prenant en compte les ordres supérieurs du développement de Taylor défini au chapitre 3. Elles tendent donc à évaluer plus précisément les grandeurs globales (hauteur d'interface  $h$ , saut de pression à l'interface  $\Phi$ , champ de température  $T$ , etc.) constituant les modèles complets du ménisque, du film et de la transition.

Pour ce qui est des modèles associés au film et à la transition, la procédure de résolution a déjà été présentée dans la section 3.4.2. Cette procédure permet, à l'ordre de perturbation  $[ij]$ , d'obtenir une équation différentielle portant sur la correction  $h^{[ij]}$ . De cette correction de la hauteur de l'interface découle la connaissance de toutes les autres grandeurs à ce niveau de perturbation. Cette correction  $h^{[ij]}$  est cependant définie à une constante d'intégration près, cette constante provenant de la forme de la correction apportée à la hauteur de l'interface dans la région du ménisque.

Dans la région du ménisque, la procédure d'obtention de la correction  $h_1^{[ij]}$  est un peu plus subtile. Nous ne pourrions accéder à des informations sur la dynamique de l'écoulement dans cette région qu'à partir du troisième ordre de perturbation en  $Ca^{1/3}$ . En revanche, la partie thermique du modèle peut être obtenue dès l'ordre principal, et a d'ailleurs déjà été évoquée dans le chapitre précédent, section 4.6. À l'ordre 0 de développement en  $Re$ , les deux problèmes dynamique et thermique sont découplés. Le problème thermique modélise donc, à l'ordre  $[i0]$ , quel que soit  $i$ , uniquement la conduction de la chaleur dans le bouchon de liquide. L'advection de chaleur par l'écoulement dans le bouchon de liquide ne pourra être pris en compte qu'au premier ordre en  $Re$ .

La première partie de ce chapitre (sections 5.1 et 5.2) se consacre au modèle de la région du ménisque. Il y est déterminé les corrections successives apportées à la hauteur de l'interface, et les problèmes dynamique et thermique y sont analysés. Un tableau récapitulatif des résultats de ces sections est présenté en guise de conclusion dans la figure 5.6.



Les résultats obtenus à partir du modèle de ménisque sont utilisés dans la deuxième partie de ce chapitre pour étudier conjointement les modèles du film et de transition, et en déduire toutes les informations possibles sur les corrections apportées à la hauteur de l'interface dans ces régions.

## 5.1 Dynamique dans la région du ménisque

### 5.1.1 Forme du ménisque aux premiers ordres en $Ca^{1/3}$ et $Re$

De par la forme des équations de conservation de la quantité de mouvement dans la zone du ménisque (2.29b) et (2.29c), les corrections en pression seront toujours constantes avant l'ordre trois en  $Ca^{1/3}$ , ce qui revient à dire que  $\Phi_1^{[ij]}$  est constant pour  $i$  entier compris entre 0 et 2 et quelle que soit la valeur de  $j$ . De plus, dans l'ensemble des modèles, aucun terme, dans aucune équation de conservation ou condition aux limites, n'a pour facteur le nombre capillaire à la puissance un tiers. Pour ces raisons, les modèles des différentes régions écrits au premier ordre en  $Re$  sont absolument identiques aux problèmes écrits dans les mêmes régions au premier ordre en  $Ca^{1/3}$ .

Le bilan des contraintes normales à l'interface liquide-vapeur (2.31a) à l'ordre [10], en utilisant l'expression (4.2) définissant la hauteur  $h_1^{[00]}$  avec  $R_0 = 1$ , se réduit à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_1^{[10]} (1 - (x_1 + 1)^2)^{1/2} \\ = h_1^{[10]} - 4(x_1 + 1) (1 - (x_1 + 1)^2) d_x h_1^{[10]} + (1 - (x_1 + 1)^2)^2 d_{x^2} h_1^{[10]} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Le saut de pression  $\Phi_1^{[10]}$  est constant, et un logiciel de calcul formel donne la solution générale complexe suivante :

$$h_1^{[10]} = \frac{\mathbf{i} \Phi_1^{[10]} x_1 + 2(1 + x_1)C_1 - 2C_2 + 2C_2(1 + x_1)\text{arctanh}(1 + x_1)}{2\mathbf{i} (1 - (x_1 + 1)^2)^{1/2}} \quad (5.2)$$

où  $\mathbf{i}$  est l'unité imaginaire.

Une condition de symétrie doit s'appliquer sur ce profil, s'écrivant  $h_1^{[10]}(0) = 0$ , qui impose de prendre les deux constantes d'intégration  $C_1$  et  $C_2$  nulles. Puisque la dérivée de l'ordre principal du paramètre d'interface  $h_1^{[00]}$  au centre du tube capillaire tend déjà vers l'infini négatif, la dérivée au centre du tube de  $h_1^{[10]}$  peut soit être constante, soit tendre vers l'infini négatif elle aussi. La solution physiquement admissible de l'équation

(5.1) peut donc s'écrire :

$$h_1^{[10]} = \frac{\Phi_1^{[10]} x_1}{2 (1 - (x_1 + 1)^2)^{1/2}} \quad (5.3)$$

Le saut de pression  $\Phi_1^{[10]}$  est déterminé à l'aide de la condition de raccordement avec la zone du ménisque dérivée plus tôt (4.37b). Puisque nous avons montré que la distance  $l_0$  entre les repères associés aux zones 1 et 2 est égale au rayon du tube capillaire (4.40), il vient que le saut de pression à travers le ménisque est nul au premier ordre en nombre capillaire puissance un tiers et qu'il n'existe donc pas de perturbation de l'interface liquide-vapeur dans le ménisque à l'ordre [10].

$$\Phi_1^{[10]} = 0 \quad ; \quad h_1^{[10]} = 0 \quad (5.4)$$

Ce résultat permet de définir la constante d'ajustement  $s$  définie par le changement de variables (4.27) grâce à l'équation (4.38b). En utilisant le résultat (4.41),  $s$  est donc donnée comme :

$$s = -A_1 \quad (5.5)$$

La constante  $A_1$  est déjà connue grâce à la résolution de l'équation d'interface de la zone de transition à l'ordre principal et est fonction des paramètres du problème. Il est aussi possible dès à présent de définir la condition aux limites de l'équation d'interface liée au ménisque au deuxième ordre en  $Ca^{1/3}$ , donnée par l'équation (4.38c) qui devient :

$$h_1^{[20]}(-l_0) = -A_0 \delta^{[00]} + \frac{A_1^2}{2} \quad (5.6)$$

De plus l'expression suivante provient des termes en  $Ca^1 Re^0$  de la condition de raccordement (4.35) :

$$\frac{1}{2} d_{x_2} h_1^{[10]} |_{-l_0} = -\frac{B_2}{2\delta^{[00]}} \quad (5.7)$$

La constante  $B_2$  découle du développement quadratique pour des  $X$  grands du paramètre d'interface modifié  $H_2^{[10]}$  défini dans la région de transition,  $H_2^{[10]}$  et  $X$  étant définis par l'adimensionnement (4.27). Ainsi, la correction au premier ordre en fonction de  $Ca^{1/3}$  du paramètre d'interface dans la région de transition (si cette correction est non nulle, ce qui sera abordé dans la section 5.4.2) devra impérativement être affine pour des  $x_2$  grands.

Puisque le problème du ménisque au premier ordre en fonction du nombre de Reynolds est identique à celui au premier ordre en fonction du nombre capillaire, il vient immédiatement :

$$h_1^{[01]} = -\frac{\Phi_1^{[01]} x_1}{2 (1 - (x_1 + 1)^2)^{1/2}} \quad (5.8)$$

Or la condition de raccordement (4.35), après identification sur les conditions aux limites appliquées à  $h_1^{[01]}$ , donne :

$$h_1^{[01]}(-l_0) = 0 \quad (5.9a)$$

$$d_x h_1^{[01]}|_{-l_0} = 0 \quad (5.9b)$$

$$\frac{1}{2} d_{x^2} h_1^{[01]}|_{-l_0} = -\frac{C_2}{2\delta^{[00]}} \quad (5.9c)$$

Les deux premières conditions sont vérifiées en posant :

$$\Phi_1^{[01]} = 0 \quad (5.10)$$

Ceci impose une correction  $h_1^{[01]}$  nulle dans le ménisque. Comme pour le premier ordre en  $Ca^{1/3}$ , la perturbation du paramètre d'interface dans la région de transition  $h_2^{[01]}$ , s'il n'est pas continument nul, devra être affine pour des  $x_2$  grands pour assurer la validité de la troisième condition (5.9c).

### 5.1.2 Deuxième ordre en $Ca^{1/3}$

Notons d'abord que la correction apportée au paramètre d'interface dans la région du ménisque au premier ordre en fonction du nombre capillaire est nulle, et que le bilan des contraintes normales dans la zone du ménisque (2.31a) ne possède aucun terme fonction du nombre capillaire à la puissance deux tiers. Dans ces conditions, l'équation d'interface portant sur la correction à l'ordre deux suivant  $Ca^{1/3}$  (dans la zone du ménisque) est identique à celle portant sur la correction à l'ordre 1 donnée par l'équation (5.1). Il est donc possible d'écrire :

$$\begin{aligned} \Phi_1^{[20]} (1 - (x_1 + 1)^2)^{1/2} \\ = h_1^{[20]} - 4(x_1 + 1) (1 - (x_1 + 1)^2) d_x h_1^{[20]} + (1 - (x_1 + 1)^2)^2 d_{x^2} h_1^{[20]} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Satisfaisant la condition de symétrie au centre du tube capillaire, l'expression de la fonction de correction de l'interface du ménisque s'écrit alors :

$$h_1^{[20]} = -\frac{\Phi_1^{[20]} x_1}{2 (1 - (x_1 + 1)^2)^{1/2}} \quad (5.12)$$

En plus de la condition (5.6), la condition de raccordement (4.35) entre le ménisque et la région de transition donne la relation suivante pour le terme  $h_1^{[20]}$ , la correction au deuxième ordre suivant le nombre capillaire du paramètre d'interface :

$$d_x h_1^{[20]}|_{-l_0} = -\left(B_1 + \frac{B_2 s}{\delta^{[00]}}\right) \quad (5.13)$$

La relation (5.7) imposant un coefficient  $B_2$  nul, les conditions de raccordement (5.13) et (5.6) engendrent la relation suivante :

$$\frac{\Phi_1^{[20]}}{2} = -B_1 = A_0 \delta^{[00]} - \frac{A_1^2}{2} \quad (5.14)$$

Les constantes  $A_0$ ,  $A_1$  et  $\delta^{[00]}$  sont déjà connues grâce à la résolution de l'équation d'interface dans la zone de transition à l'ordre principal. Le coefficient  $B_1$  est donc connu et permettra de résoudre l'équation d'interface dans la région de transition à l'ordre [10].

Pour des nombres d'évaporation modifiés  $E_f$  allant jusqu'à  $10^{-1}$ , les corrections du saut de pression à l'interface sont relativement constantes, à 0.2% près. Le problème thermique n'a que peu d'influence dans la zone du ménisque, au moins pour ce qui est du saut de pression à l'interface liquide-vapeur. Ce saut de pression dans le ménisque reculant est donné par :

$$\Phi_1 = 1 + 7.720 Ca^{2/3} + O(Ca, Re) \quad (5.15)$$

Ce résultat est très proche du résultat isotherme dérivé par Bretherton [12] et rappelé par l'équation (1.11). Park et Homsy [63] donnent quant à eux une expression du saut de pression présentant un rapport deux avec celui présenté ci-dessus, ce qui est cohérent puisqu'ils effectuent leurs calculs dans une cellule de Hele-Shaw, l'interface liquide-vapeur ne possédant alors qu'une seule courbure principale non nulle. Notre interface n'est pas quasi-circulaire, mais bien quasi-sphérique, et si nous avons pris en compte le saut de pression induit au premier ordre par la courbure polaire de l'interface, il n'en est pas de même des ordres supérieurs, et la contribution au deuxième ordre suivant  $Ca^{1/3}$  est donc multipliée par deux comparée aux résultats de Park et Homsy.

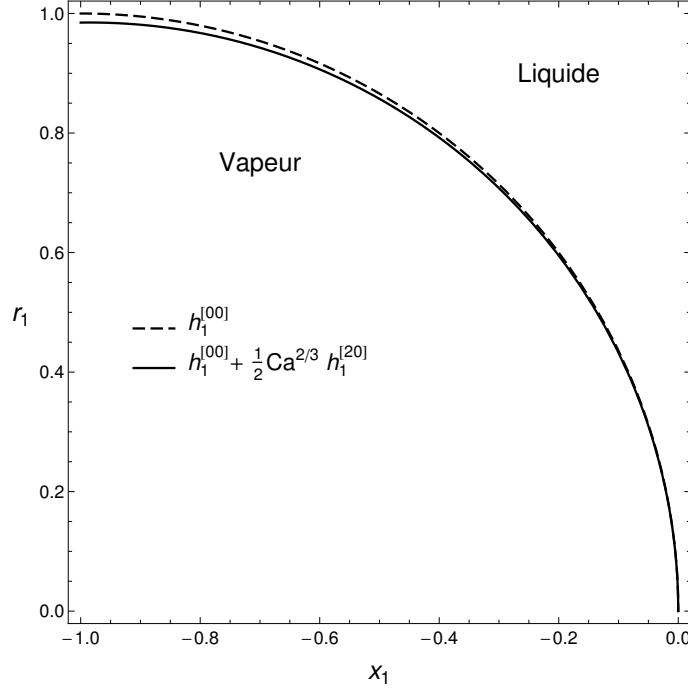


Figure 5.1: Profil de l'interface liquide-vapeur dans la région du ménisque à l'ordre 2 en  $Ca^{1/3}$  pour l'eau avec  $Ca = 7.10^{-4}$  et  $E = 10^{-4}$ .

La figure 5.1 présente la correction apportée par l'ordre [20] au profil de l'interface liquide-vapeur. Tout en gardant une interface quasi-sphérique au centre du tube capillaire, contrainte par la condition de symétrie au centre de la conduite, la forme du ménisque tend à se rapprocher de la réalité, où un film de liquide d'épaisseur finie est déposé le long de la paroi, à la suite du ménisque. La hauteur du film de liquide déposé représenté sur la figure 5.1 reste cependant différente de la hauteur réelle approchée  $\delta^{[00]}$  calculée précédemment, puisque ces hauteurs de liquide ne sont pas correctement modélisées par le modèle associé à la région du ménisque.

### 5.1.3 Ordres supérieurs en $Re$

Puisque les ordres [10] et [01] n'apportent pas de correction à la forme de l'interface dans la région du ménisque, les équations d'interface de cette zone aux ordres [11] ou [02] ont la même forme que l'équation (5.1), et donc la même forme de solution. La condition de raccordement (4.35) permet d'écrire les conditions particulières suivantes :

$$h_1^{[11]}(-l_0) = 0 \quad (5.16a)$$

$$d_x h_1^{[11]}|_{-l_0} = -\left(C_1 + \frac{C_2 s}{\delta^{[00]}}\right) \quad (5.16b)$$

$$\frac{1}{2} d_{x^2} h_1^{[11]} \big|_{-l_0} = -\frac{E_2}{2\delta^{[00]}} \quad (5.16c)$$

$$h_1^{[02]}(-l_0) = 0 \quad (5.17a)$$

$$d_x h_1^{[02]} \big|_{-l_0} = 0 \quad (5.17b)$$

$$\frac{1}{2} d_{x^2} h_1^{[02]} \big|_{-l_0} = -\frac{F_2}{2\delta^{[00]}} \quad (5.17c)$$

La condition (5.16a) associée au fait que  $h_1^{[11]}$  s'écrive de la même manière que (5.1) impose un saut de pression  $\Phi_1^{[11]}$  nul. De plus, la condition (5.9c) a déjà imposé un coefficient  $C_2$  nul lui aussi. Il s'ensuit donc que les coefficients  $C_1$  et  $E_2$  doivent eux-aussi être nuls. De même, la condition (5.17a) imposant un saut de pression  $\Phi_1^{[02]}$  nul, le coefficient  $F_2$  doit être nul.

En raisonnant de proche en proche, il est ainsi possible de montrer que, pour des ordres de perturbation  $[ij]$ ,  $i$  étant compris entre 0 et 2 et  $j$  supérieur ou égal à 1, aucune correction de l'interface de la zone du ménisque n'a lieu, et le paramètre d'interface de la zone de transition doit à ces niveaux de perturbation tendre vers une fonction nulle quand  $x_2$  devient grand.

#### 5.1.4 Champ de vitesse au troisième ordre en $Ca^{1/3}$

Jusqu'à présent, dans la région du ménisque, les bilans hydrodynamiques se réduisent à un champ de pression constant nous empêchant d'accéder à l'expression du champ de vitesse dans le bouchon de liquide, mais permettant d'obtenir facilement l'équation d'interface associée à cette région à partir du bilan des contraintes normales à l'interface liquide-vapeur. Cette obtention facile de l'équation d'interface a aussi comme avantage de permettre de découpler le problème dynamique du problème thermique.

La résolution du problème thermique ainsi découplé dans la région du ménisque à l'ordre principal a été abordé dans la section 4.6. Les premier et deuxième ordres en fonction du nombre capillaire à la puissance un tiers seront analysés dans la section 5.2.

A partir du troisième ordre de perturbation en  $Ca^{1/3}$ , la résolution du bilan hydrodynamique devient obligatoire, puisque la correction du champ de pression à cette ordre de perturbation n'est plus dégénérée, mais régie par les équations suivantes :

$$\partial_x U_1^{[00]} + \frac{1}{r} \partial_r (r V_1^{[00]}) = 0 \quad (5.18a)$$

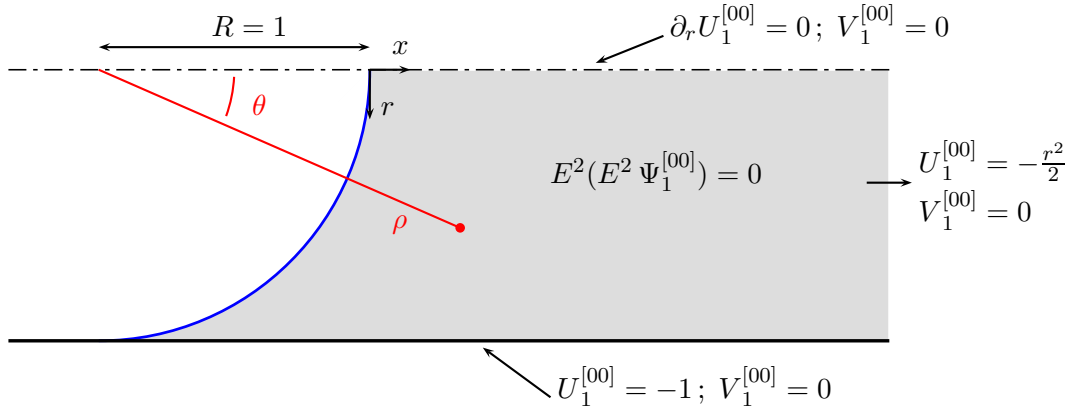


Figure 5.2: Problème dynamique dans le bouchon de liquide à l'ordre [30] permettant de déterminer le champ de vitesse à l'ordre principal dans la région du ménisque.

$$\partial_x P_1^{[30]} = \partial_{x^2} U_1^{[00]} + \frac{1}{r} \partial_r \left( r \partial_r U_1^{[00]} \right) \quad (5.18b)$$

$$\partial_r P_1^{[30]} = \partial_{x^2} V_1^{[00]} + \frac{1}{r} \partial_r \left( r \partial_r V_1^{[00]} \right) \quad (5.18c)$$

Dans la suite de cette section, l'indice de région est omis pour gagner en clarté, et les décompositions de la vitesse dans les différents repères sont toutes notées  $U$ , et indicées par  $r$  et  $x$  dans le repère cylindrique et  $\rho$  et  $\theta$  dans le repère sphérique. Une fonction de courant  $\Psi$ , associée au champ de vitesse dans le bouchon de liquide, est écrite comme suit suivant le repère cylindrique ou sphérique dans lequel elle est définie :

$$U_x^{[00]} = \frac{1}{r} \partial_r \Psi^{[00]} ; \quad U_r^{[00]} = -\frac{1}{r} \partial_x \Psi^{[00]} \quad (5.19a)$$

$$U_\rho^{[00]} = \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \partial_\theta \Psi^{[00]} ; \quad U_\theta^{[00]} = -\frac{1}{\rho \sin \theta} \partial_\rho \Psi^{[00]} \quad (5.19b)$$

À partir des équations (5.18), il vient :

$$E^2(E^2 \Psi_1^{[00]}) = 0 \quad (5.20)$$

Ce n'est que maintenant qu'il est possible de déterminer le champ de vitesse à l'ordre principal dans le bouchon de liquide en amont du ménisque. Pour ce faire, il est nécessaire de résoudre une équation différentielle d'ordre quatre de la fonction de courant  $\Psi^{[00]}$ . Ce problème est résumé en partie par la figure 5.2.

L'opérateur différentiel  $E^2$  régissant les variations de la fonction de courant dans le bouchon de liquide provient de la réécriture de l'équation de Stokes (5.18) avec les définitions (5.19), et est défini différemment suivant le système de coordonnées considéré (voir l'ouvrage de Goldstein *et al.* [26], chap. III).

$$\text{cylindrique : } E^2 = \partial_{r^2} - \frac{1}{r} \partial_r + \partial_{x^2} \quad (5.21a)$$

$$\text{sphérique : } E^2 = \partial_{\rho^2} + \frac{1 - \zeta^2}{\rho^2} \partial_{\zeta^2} \quad \text{avec } \zeta = \cos \theta \quad (5.21b)$$

Une condition de symétrie est appliquée au centre de la conduite cylindrique, et il est supposé que le champ de vitesse loin dans le bouchon de liquide est celui d'un écoulement de Poiseuille établi. A la paroi du tube cylindrique, des conditions de non-glissement et de non-pénétration sont appliquées. Les conditions dynamiques à l'interface liquide-vapeur sont définies comme suit :

$$U_\rho^{[00]} = \Gamma \iota g_1^{[00]} \quad (5.22a)$$

$$\rho \partial_\rho \left( \frac{U_\theta^{[00]}}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \partial_\theta U_\rho^{[00]} = 0 \quad (5.22b)$$

La condition (5.22a) est une condition de pénétration à travers l'interface liquide-vapeur dont la densité de flux de masse est déjà connue depuis la section 4.6. Le champ de vitesse à l'ordre principal est donc lié à la résolution du modèle thermique à l'ordre principal. La condition (5.22b) quant à elle est la réécriture de la condition (2.21) dans la base sphérique exprimée à l'ordre principal (cf. Goldstein *et al.* [26], chapitre III pour l'expression du déviateur du tenseur des contraintes hydrodynamiques  $\Sigma$  en coordonnées sphériques polaires). La partie thermo-capillaire du bilan (2.21) n'est ici pas prise en compte en considérant que le nombre de Marangoni modifié  $Ma^*$  est très petit devant l'unité.

Ce problème portant sur la fonction de courant  $\Psi^{[00]}$  ne peut-être résolu analytiquement qu'en combinant linéairement les solutions générales en coordonnées cylindrique et sphérique, et en utilisant un espace continu des valeurs propres associées à la solution cylindrique. Cette méthode de résolution est donc effectuée dans le même esprit que celle de l'équation de Laplace présentée dans l'annexe D.3, et est identique à celle développée par Leichtberg *et al.* [46] calculant le champ de vitesse autour d'une bille solide plongée dans un écoulement contenu dans un tube cylindrique. L'exception notable entre Leichtberg et la présente résolution est la condition à la paroi sphérique de la bille, puisque nous n'avons pas ici de paroi solide, mais ce qui peut s'assimiler à une paroi poreuse.

La solution la plus générale de ce problème satisfaisant les conditions de symétrie au centre de la conduite et les conditions loin dans le bouchon de liquide est donnée par



Leichtberg *et al.* [46] :

$$\begin{aligned} \Psi_1^{[00]} = & -\frac{1}{4} r^4 + \int_0^{+\infty} (A(\lambda) r I_1(\lambda r) + B(\lambda) r^2 I_0(\lambda r)) \cos(\lambda(x+1)) d\lambda \\ & + \sum_{n=2}^{+\infty} (\alpha_n \rho^{1-n} + \beta_n \rho^{3-n}) P_n(\cos \theta) \quad (5.23) \end{aligned}$$

La procédure de résolution à partir de cette expression est la même que dans la résolution de l'équation de Laplace dans l'annexe D.3. Les deux conditions à la paroi solide du tube capillaire ainsi qu'une transformée inverse de Fourier permettent d'obtenir les expressions des fonctions  $A(\lambda)$  et  $B(\lambda)$  en fonction des coefficients  $\alpha_n$  et  $\beta_n$ . Cette nouvelle expression de la fonction de courant est ensuite introduite dans les deux conditions dynamiques à l'interface liquide-vapeur (5.22). Celles-ci sont ensuite discrétisées le long de l'interface pour générer  $2m$  équations linéairement indépendantes permettant d'obtenir les  $m$  premiers coefficients  $\alpha_n$  et  $\beta_n$ .

Ce calcul est théoriquement faisable, mais comme pour le problème thermique à l'ordre [20], qui sera évoqué dans la section 5.2, le temps d'évaluation des intégrales infinies induit par ce calcul n'a pas permis d'obtenir des résultats exploitables sur le champ de vitesse à l'ordre principal dans la région du ménisque.

L'obtention de ce champ de vitesse à l'ordre principal dans le bouchon de liquide permet de déterminer la correction de l'interface  $h_1^{[30]}$ , à travers le bilan des contraintes normales à l'interface exprimé à l'ordre [30], où la contribution du déviateur du tenseur des contraintes hydrodynamiques est prise en compte pour la première fois dans la région du ménisque. Le champ de pression  $P_1^{[30]}$ , et donc le saut de pression  $\Phi_1^{[30]}$ , sont exprimés grâce aux équations (5.18). La correction  $h_1^{[30]}$  sert ensuite de condition de raccordement asymptotique pour le problème du liquide dans la région de transition à travers l'équation de raccordement (4.35).

### 5.1.5 Prise en compte de l'inertie: ordre 31

Le développement inclut la partie advective des équations de Navier-Stokes pour la première fois dans la région du ménisque à l'ordre de perturbation [31], c'est-à-dire le troisième ordre en  $Ca^{1/3}$  et le premier en  $Re$ . À cet ordre, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$U_1^{[00]} \partial_x U_1^{[00]} + V_1^{[00]} \partial_r U_1^{[00]} = -\frac{1}{6} \partial_x P_1^{[31]} + \partial_{r^2} U_1^{[01]} + \frac{1}{r} \partial_r U_1^{[01]} + \partial_{x^2} U_1^{[01]} \quad (5.24a)$$

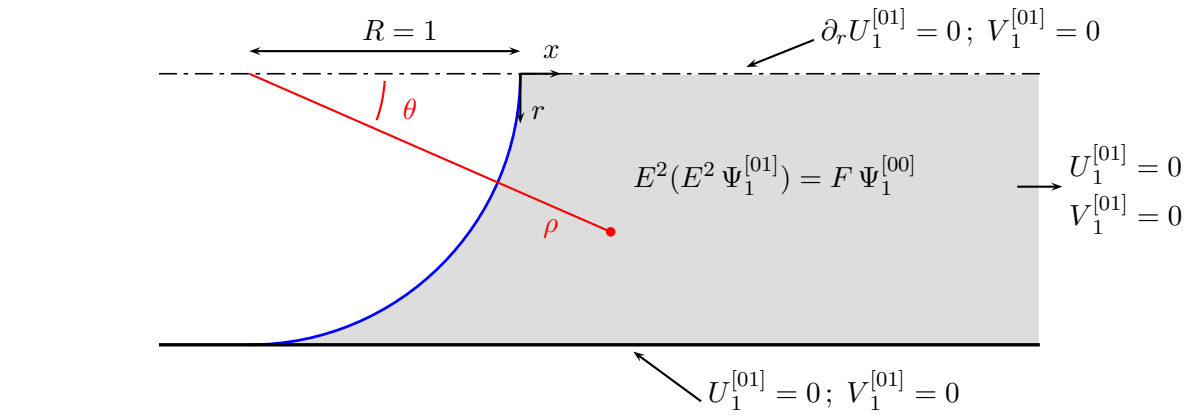


Figure 5.3: Problème dynamique dans le bouchon de liquide à l'ordre [31] permettant de déterminer le champ de vitesse au premier ordre en fonction du nombre de Reynolds.

$$U_1^{[00]} \partial_x V_1^{[00]} + V_1^{[00]} \partial_r V_1^{[00]} = -\frac{1}{6} \partial_r P_1^{[31]} + \partial_{r^2} V_1^{[01]} + \frac{1}{r} \partial_r V_1^{[01]} + \partial_{x^2} V_1^{[01]} \quad (5.24b)$$

En définissant une nouvelle fonction de courant  $\Psi_1^{[01]}$  de la même manière que pour le champ de vitesse à l'ordre principal (equations 5.19), ce système d'équations peut s'écrire sous la forme d'une équation différentielle non-homogène d'ordre quatre :

$$E^2(E^2 \Psi_1^{[01]}) = F \Psi_1^{[00]} \quad (5.25)$$

L'opérateur différentiel non linéaire  $F$  provient de la réécriture des membres de gauche des équations (5.24). Le champ de vitesse  $(U_1^{[00]}, V_1^{[00]})$  est déjà connu et peut-être exprimé sous la forme de la fonction de courant  $\Psi_1^{[00]}$ . Pour obtenir la solution générale de cette équation non-homogène, la fonction de courant  $\Psi_1^{[01]}$  est décomposée en deux fonctions particulières :

$$\Psi_1^{[01]} = \Psi_a + \Psi_b \quad (5.26a)$$

$$\text{telles que } E^2 \Psi_a = 0 ; \quad E^2 \Psi_b = \Psi_a + \Psi_c \quad \text{et} \quad E^2 \Psi_c = F \Psi_1^{[00]} \quad (5.26b)$$

Les conditions aux limites permettant de déterminer les constantes d'intégration générées par cette résolution sont présentées sur la figure 5.3. En ce qui concerne les conditions dynamiques à l'interface liquide-vapeur du ménisque sphérique, elles sont identiques à celles à l'ordre principal à cause de l'absence de correction de cette interface dans la région du ménisque à l'ordre [10] ( $h_1^{[10]} = 0$ ).

$$U_\rho^{[01]} = \Gamma^{lg} \Psi_1^{[01]} \quad (5.27a)$$



dans ce problème ne provoque la mise en place d'un champ de température d'une forme particulière. Une solution triviale, et finalement la seule qui ait un sens dans ce genre de problème, est la solution nulle :

$$T_1^{[10]} = 0 \quad (5.28)$$

Dans le modèle global mis en place dans ce mémoire, aucune information nouvelle concernant la dynamique et la thermique de la phase liquide en avant d'un ménisque reculant ne peut être obtenue au premier ordre de correction en  $Ca^{1/3}$ . Il faut attendre le deuxième ordre de correction en  $Ca^{1/3}$  pour voir une première correction apportée à la forme du ménisque, et donc au champ de température dans le bouchon de liquide qui le précède.

### 5.2.2 Premier ordre en $Re$

Le nombre capillaire ne rentre pas en ligne de compte dans l'équation de la chaleur, dans le modèle associé à la région du ménisque. Donc, au premier ordre de perturbation suivant  $Re$ , le terme inertiel est entièrement considéré. C'est bien sûr le champ de vitesse approché à l'ordre principal, et non simplement sa correction à l'ordre [01], qui est pris en compte. L'advection de chaleur commence donc à être prise en compte dans la résolution à cet ordre de perturbation.

$$Pr \left( U_1^{[00]} \partial_x T_1^{[00]} + V_1^{[00]} \partial_r T_1^{[00]} \right) = \partial_{x^2} T_1^{[01]} + \frac{1}{r} \partial_r \left( r \partial_r T_1^{[01]} \right) \quad (5.29)$$

Le modèle thermique à cet ordre de perturbation est présenté sur la figure 5.5. Dans cette figure, le vecteur  $\vec{U}_1^{[00]}$  représente le vecteur vitesse dans le bouchon de liquide à

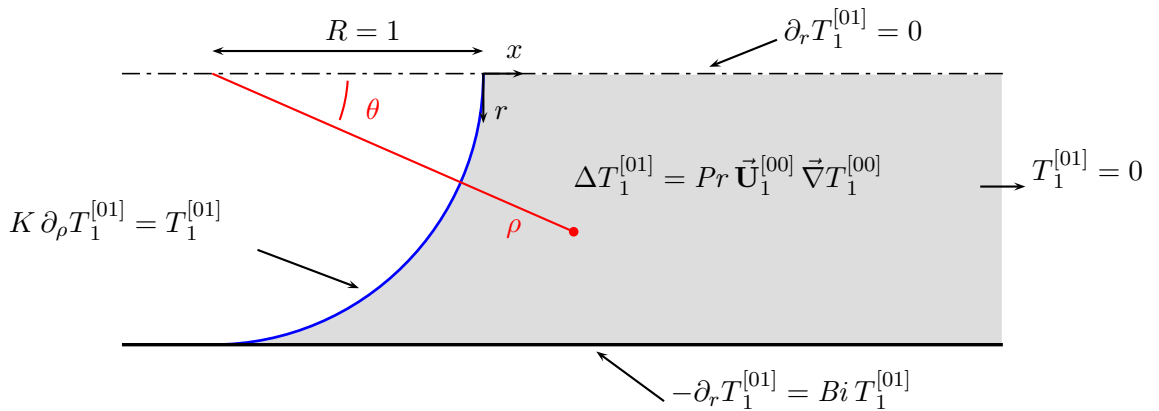


Figure 5.5: Problème associé au champ de température  $T_1^{[01]}$ .

l'ordre principal. Il peut être exprimé en coordonnées cylindriques ou sphériques, suivant les besoins de la résolution. Les quatre conditions aux limites du problème sont homogènes. La correction du champ de température à l'ordre [01] provient donc uniquement du champ de vitesse présent dans le bouchon de liquide.

Cependant, nous avons vu que le champ de vitesse à l'ordre principal dans cette région ne pouvait être obtenu qu'à l'ordre de calcul [30]. Il est donc indispensable de calculer les corrections apportées par le développement suivant le nombre capillaire avant de pouvoir obtenir les corrections dues à la partie inertielle du modèle global.

Nous avons déjà vu que la correction de l'interface  $h_1^{[01]}$  au premier ordre en  $Re$  est nulle. Les conditions de raccordement avec la région de transition proche de la paroi impose alors une correction nulle dans cette région, ainsi que dans la région du film de liquide.

L'apport de l'ordre [01] au modèle global, ainsi d'ailleurs que l'apport de tous les ordres de perturbation en  $Re$  avant le troisième ordre en  $Ca^{1/3}$ , se résume donc à la prise en compte des effets inertiels sur le champ de température dans le bouchon de liquide.

### 5.2.3 Deuxième ordre en $Ca^{1/3}$

La modification de la forme de l'interface liquide-vapeur dans la région du ménisque à l'ordre [20] aboutit à une formulation du problème thermique dans cette région qui présente une condition inhomogène sur cette interface. En effet, comme expliqué dans la section 3.3.2, le bilan de flux de chaleur à travers l'interface liquide-vapeur à l'ordre [20] est toujours exprimé sur l'interface approximée  $h_1^{[00]}$ . Il faut donc modifier le bilan de flux pour prendre en compte cette différence entre le bilan réel et le bilan effectivement pris en compte. Le bilan de flux à l'ordre [20] à l'interface liquide vapeur s'écrit alors, en ne prenant en compte que les termes différents de zéro :

$$K \partial_\rho T_1^{[20]} + K \partial_\rho \left( h_1^{[20]} \partial_r T_1^{[00]} \right) = T_1^{[20]} + h_1^{[20]} \partial_r T_1^{[00]} \quad (5.30)$$

Les autres données du problème ne sont pas différentes de celles représentées dans la figure 5.4, en remplaçant la fonction  $T_1^{[10]}$  par  $T_1^{[20]}$ .

Malheureusement, l'inhomogénéité apportée par la correction de la forme de l'interface liquide-vapeur à cet ordre de développement, quand bien même ses composants sont connus, rend impossible une résolution utilisant une définition discrète de l'espace des valeurs propres associé à ce problème. Une définition continue de l'espace des valeurs propres suivant la méthode détaillée dans l'annexe D doit donc être utilisée, non seulement pour calculer  $T_1^{[20]}$ , mais aussi pour déterminer à nouveau  $T_1^{[00]}$ , puisque cette fonction est utilisée dans la formulation de  $T_1^{[20]}$ .

Comme il est évoqué en annexe D.3, les temps de calcul numérique demandés pour ces résolutions sont rédhibitoires. La solution du champ de température est en effet exprimée sous la forme d’une série, dont les coefficients sont déterminés par l’inversion d’une matrice dont les coefficients sont issus de l’évaluation numérique d’une double intégrale infinie de la forme :

$$a_{n,m} = \int_0^{+\infty} \int_{-1}^{+\infty} F_{n,m}(\lambda, x) \cos(\lambda(x+1)) dx d\lambda \quad (5.31)$$

L’intégrande  $F_{n,m}(\lambda, x)$  est fortement oscillante, en particulier pour des faibles valeurs de la valeur propre  $\lambda$ . L’algorithme de résolution doit donc être particulièrement précis. Pour la même raison, les troncatures nécessaires pour l’évaluation numérique doivent être réalisées assez loin dans le domaine de résolution pour que cette évaluation soit assez précise. Il faut ajouter à cela que le nombre de coefficients à calculer doit être assez grand pour que la série converge. Typiquement, les calculs préliminaires effectués ont fixé à douze le nombre de coefficients nécessaire, ce qui veut dire 144 évaluations différentes de l’équation (5.31). En tout, deux jours étaient nécessaires à ce calcul, tournant sur une machine de bonnes performances, et utilisant un algorithme d’intégration parmi les plus efficaces et précis.

Mais les évaluations numériques ne s’arrêtent pas là. Le champ de température lui-même est exprimé en fonction d’une double intégrale infinie, comme écrit dans (D.28), possédant un intégrande différent de  $F_{n,m}(\lambda, x)$ , mais non moins oscillant. L’évaluation d’un champ complet de température, pour un seul jeu de paramètre  $(\varphi_{in}, U_m, T_{sat})$ , peut donc prendre plusieurs jours. Et encore, ces ordres de grandeur de temps de calcul ne sont donnés que pour le calcul de la fonction  $T_1^{[00]}$ . Les évaluations nécessaires pour déterminer la correction  $T_1^{[20]}$  sont donc plus longues encore, puisque l’intégrande présente de nouveaux termes à intégrer numériquement.

Ces fonctions analytiques, très longues à évaluer, doivent ensuite servir dans les corrections aux ordres supérieurs, pour définir les équations d’interface de la région du ménisque, qui doivent ensuite être raccordés à la région de transition pour continuer la résolution des modèles de transition et du film de liquide. On comprend donc que cette méthode de calcul soit difficilement praticable en l’état, même effectuée sur des super-calculateurs et en parallélisant les calculs.

Une solution à ce problème serait de discrétiser numériquement le domaine de résolution, et de résoudre les équations de conservation sur cette discrétisation. Les variations de la température le long de l’interface liquide-vapeur devront ensuite être évaluées de manière continue pour pouvoir être utilisées dans la montée en ordre et le raccordement avec la région de transition. Cette méthode pourrait largement réduire les temps de calcul, mais elle n’a malheureusement pas pu être mise en oeuvre complètement dans le cadre de ce mémoire.

Néanmoins, au vu des premiers tests numériques effectués, il ne semble pas que le

champ de température à l'ordre [20] apporte une correction importante aux résultats présentés dans la section 4.6. Cet ordre de calcul ne fait que modifier légèrement la position de l'interface liquide-vapeur, et ne rajoute pas d'effet physique supplémentaire pouvant jouer un rôle plus important dans les échanges de chaleur se produisant dans le bouchon de liquide en amont du ménisque reculant.

Les corrections des ordres [01] à [31], en apportant les expressions des champs de vitesse dans ce bouchon de liquide, ainsi que leur impact sur la forme de l'interface liquide-vapeur, devraient modifier plus fondamentalement l'aspect du champ de température global dans cette région. Mais si les temps de calcul à l'ordre [20] sont trop importants pour être présentables ici, on se doute à l'avance qu'ils ne devraient pas être plus courts pour les ordres supérieurs qui utilisent les premiers.

### 5.3 Bilan sur la région du ménisque

En résolvant le modèle du ménisque à un ordre de perturbation donné, il faut bien distinguer deux choses. D'un côté, les grandeurs à déterminer, champs de vitesse, de température, etc., de l'autre, le modèle lui-même, simplifié à un ordre  $[ij]$  quelconque, qui peut être fonction de grandeurs qui ne sont pas elles-mêmes exprimées à l'ordre  $[ij]$ . Ainsi, c'est dans le modèle simplifié à l'ordre [30] qu'apparaissent pour la première fois les grandeurs  $U_1^{[00]}$  et  $V_1^{[00]}$ .

Les parties dynamique et thermique du modèle du ménisque sont couplées, mais toutes les grandeurs, à un ordre de perturbation donné, ne peuvent pas être déterminées uniquement par la résolution du modèle simplifié à cet ordre de perturbation, comme c'est le cas dans les modèles de transition ou du film. Ainsi, le champ de vitesse  $\vec{U}_1^{[00]}$  est déterminé à l'ordre [30] en fonction de la grandeur  $\Gamma_1^{lg[00]}$ , densité de flux de masse évaporée à l'ordre principal qui, elle, est connue depuis l'ordre [00]. Le champ de température  $T_1^{[01]}$  est déterminé à l'ordre [01] (jusque là tout va bien), mais en utilisant la grandeur  $\vec{U}_1^{[00]}$ , déterminée à l'ordre [30]. Ainsi, pour résoudre un ordre  $[ij]$  donné, d'autres ordres doivent être résolus, au moins en partie, dans une succession particulière.

Toutes ces relations entre les différents modèles simplifiés sont récapitulées par la figure 5.6. En vert est indiqué tout ce qu'il a été possible de déterminer dans ce mémoire, à savoir la forme de l'interface liquide-vapeur dans la région du ménisque. Il s'avère qu'avant le troisième ordre suivant  $Ca^{1/3}$ , la plupart des corrections à la position de l'interface sont nulles. La seule correction qu'il a été possible de calculer avec nos moyens, dans le temps imparti, est  $h_1^{[20]}$ .

Notre condition de raccordement entre les régions du ménisque et de transition est telle que la forme de l'interface liquide-vapeur dans le ménisque contrôle, non seulement la forme de l'interface dans la région de transition, et donc dans celle du film, mais aussi, par conséquent, l'ensemble de la dynamique et de la thermique dans ces régions.

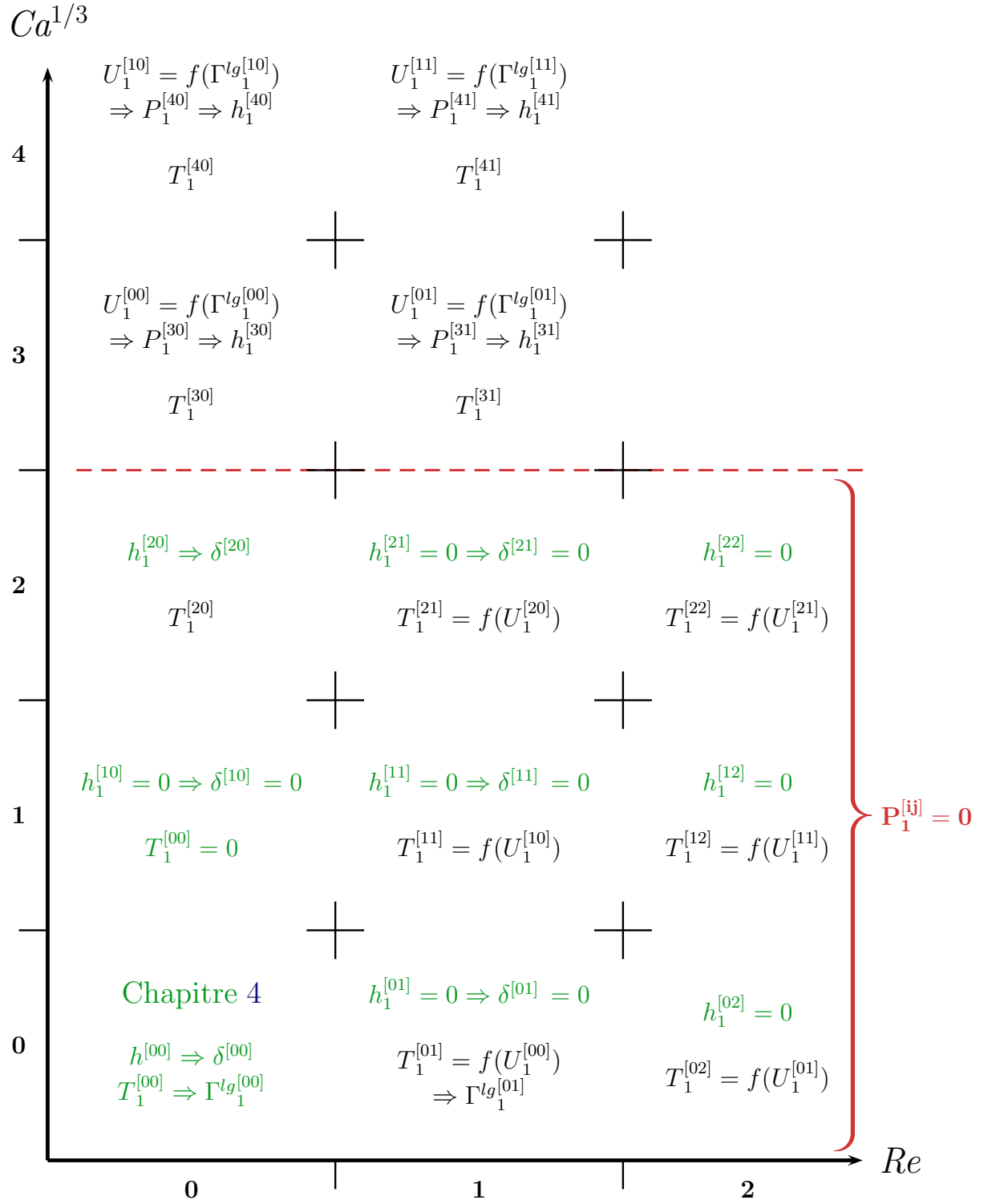


Figure 5.6: Récapitulatif des résultats du modèle associé à la région du ménisque. Vert : grandeurs déjà connues. Noir : grandeurs à déterminer.



Ainsi, nous verrons dans la section suivante, qu'une correction nulle de l'interface dans le ménisque entraîne (sauf à l'ordre [10], qui est une exception) une correction nulle dans les deux autres modèles. Mais dans les modèles de transition et du film, toutes les grandeurs à un ordre de développement peuvent être déterminées par le modèle simplifié à cet ordre. Donc, une correction nulle de l'interface dans les régions de transition et du film implique qu'il n'existe aucune correction à cet ordre de calcul, quelle qu'elle soit.

Pour ce qui est des champs de vitesse et de température dans le bouchon de liquide, ils n'ont pas pu être formellement définis dans ce mémoire. Cependant, nous avons montré qu'il est possible de les obtenir, et ainsi d'étudier les différents phénomènes physiques et leur impact sur la dynamique et la thermique de l'écoulement en amont d'une bulle de vapeur.

L'ordre principal (section 4.6) modélise la conduction de la chaleur dans le liquide. Les ordres [10] et [20] n'apportent qu'une correction venant de la variation de la forme de l'interface liquide-vapeur (donc inexistante pour [10]). Ensuite, les forces visqueuses sont prises en compte dans le bilan de quantité de mouvement à l'ordre [30], pour déterminer le champ de vitesse à l'ordre [00]. L'effet de ce champ de vitesse simplifié sur la thermique est pris en compte à l'ordre [01], où l'advection de chaleur commence à être considérée. Les effets inertiels sur le champ de vitesse sont pris en compte à l'ordre [31], où l'effet de l'évaporation à l'interface à l'ordre [01] a une influence. Ainsi de suite, le champ de vitesse est dépendant de la thermique à travers la densité de flux de masse évaporée, et influence en retour le champ de température, ce qui influence les niveaux d'évaporation.

De surcroît, il est sûr que le calcul du champ de vitesse à l'ordre [30] aura un effet sur l'interface liquide-vapeur, et de proche en proche aura aussi un effet sur les régions de transition et du film de liquide.

## 5.4 Film et transition aux premiers ordres en $Ca^{1/3}$ et $Re$

### 5.4.1 Région du film de liquide

Les modèles associés à la région du film de liquide déposé aux ordres supérieurs, à la fois en fonction de  $Ca^{1/3}$  et de  $Re$ , sont présentés dans l'annexe E.2 et aboutissent en particulier aux équations d'interface suivantes en respectant la procédure de résolution présentée dans la section 3.4.2 :

$$d_x h_3^{[10]} = - \frac{E_f Bi_m \beta_a h_3^{[10]}}{\left( \beta_b + Bi_m h_3^{[00]} \right)^2} \quad (5.32)$$

$$d_x h_3^{[01]} = -\frac{E_f Bi_m \beta_a h_3^{[01]}}{\left(\beta_b + Bi_m h_3^{[00]}\right)^2} \quad (5.33)$$

Ces équations différentielles linéaires possèdent respectivement comme conditions aux limites les perturbations de la hauteur initiale  $\delta^{[10]}$  et  $\delta^{[01]}$ , permettant d'écrire les expressions suivantes :

$$h_3^{[10]}(x_3) = \delta^{[10]} \frac{\beta_b + Bi_m \delta^{[00]}}{\beta_b + Bi_m h_3^{[00]}(x_3)} \quad (5.34)$$

$$h_3^{[01]}(x_3) = \delta^{[01]} \frac{\beta_b + Bi_m \delta^{[00]}}{\beta_b + Bi_m h_3^{[00]}(x_3)} \quad (5.35)$$

Ces expressions ainsi que leurs dérivées pourront être utilisées dans la résolution numérique des équations d'interface de la région de transition à ces ordres respectifs.

### 5.4.2 Région de transition

Comme il est possible de le voir dans l'annexe E.1, les modèles associés aux perturbations aux premiers ordres en fonction du nombre capillaire et du nombre de Reynolds sont identiques, et entraînent donc des équations d'interface très proches :

$$-d_x \left( \frac{1}{3} h_2^{[00]3} d_{x3} h_2^{[10]} + h_2^{[10]} h_2^{[00]2} d_{x3} h_2^{[00]} \right) + d_x h_2^{[10]} = -\frac{Bi_m \beta_a h_2^{[10]}}{\left(\beta_b + Bi_m h_2^{[00]}\right)^2} \quad (5.36)$$

$$-d_x \left( \frac{1}{3} h_2^{[00]3} d_{x3} h_2^{[01]} + h_2^{[01]} h_2^{[00]2} d_{x3} h_2^{[00]} \right) + d_x h_2^{[01]} = -\frac{Bi_m \beta_a h_2^{[01]}}{\left(\beta_b + Bi_m h_2^{[00]}\right)^2} \quad (5.37)$$

Puisque le paramètre d'interface  $h_2^{[00]}$  est quadratique pour des  $x_2$  grands, il est possible de montrer en utilisant la démarche présentée dans l'annexe C que les deux paramètres d'interface  $h_2^{[10]}$  et  $h_2^{[01]}$  sont eux aussi quadratiques pour des  $x_2$  grands. La résolution numérique des équations adimensionnées par la relation (4.27) peut donc s'écrire à l'infini :

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} h_2^{[10]}(x_2) = \left( B_0 \delta^{[00]} + B_1 s + \frac{B_2 s^2}{2 \delta^{[00]}} \right) + \left( B_1 + \frac{B_2 s}{\delta^{[00]}} \right) x_2 + \frac{B_2}{\delta^{[00]}} \frac{x_2^2}{2} + o(1) \quad (5.38)$$

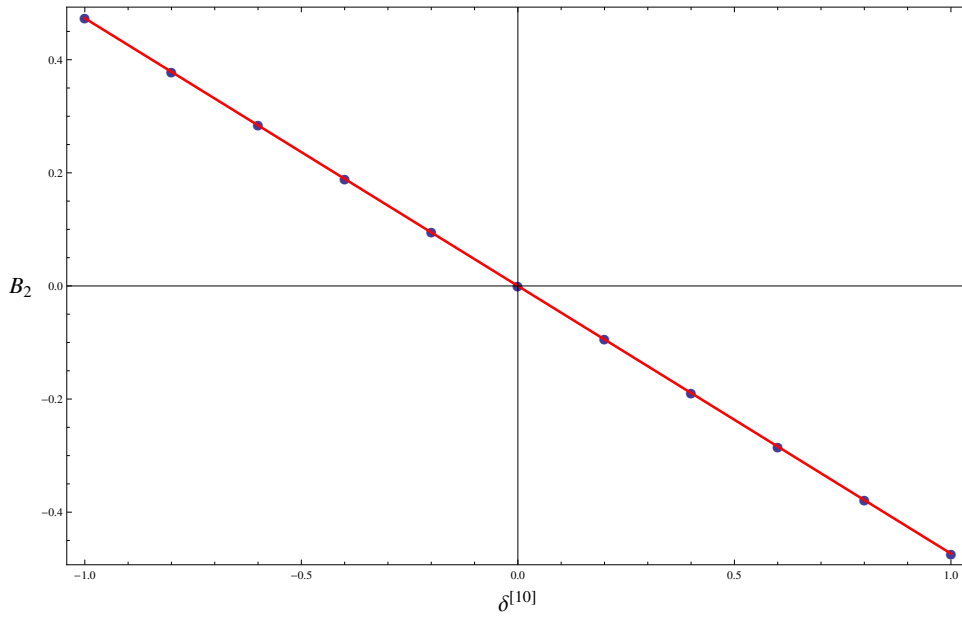


Figure 5.7: Variation du paramètre  $B_2$  – courbure à l’infini de  $H_2^{[10]}$  – pour différentes valeurs de  $\delta^{[10]}$ , provenant de la résolution numérique de (5.36) ou (5.37).

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} h_2^{[01]}(x_2) = \left( C_0 \delta^{[00]} + C_1 s + \frac{C_2 s^2}{2 \delta^{[00]}} \right) + \left( C_1 + \frac{C_2 s}{\delta^{[00]}} \right) x_2 + \frac{C_2}{\delta^{[00]}} \frac{x_2^2}{2} + o(1) \quad (5.39)$$

Or, les conditions (5.7) et (5.9c) imposent des coefficients  $B_2$  et  $C_2$  nuls. Il est donc impératif de résoudre itérativement les équations (5.36) et (5.37) comme il a été fait à l’ordre principal pour trouver les valeurs de  $\delta^{[10]}$  et  $\delta^{[01]}$  annulant respectivement les constantes  $B_2$  et  $C_2$ .

Pour ce qui est de l’ordre [01], la condition (5.16b) impose un coefficient  $C_1$  nul, et de proche en proche, en suivant le raisonnement de la section 5.1.3, il est possible de montrer que  $C_0$  doit lui aussi être nul, ce qui entraîne une correction continuum nulle du paramètre d’interface à l’ordre [01] dans la région de transition, puisque les conditions aux limites de (5.37) sont nulles en 0 et à l’infini. Aucune correction ne peut donc être apportée au problème au premier ordre de perturbation en fonction du nombre de Reynolds, quelle que soit la région considérée.

Concernant l’ordre [10], les résultats de plusieurs calculs utilisant différentes valeurs de  $\delta^{[10]}$  sont présentés dans la figure 5.7, et montrent que pour annuler la constante  $B_2$  et satisfaire la condition (5.7), la perturbation de la hauteur initiale du film de liquide au premier ordre suivant  $Ca^{1/3}$  doit être nulle. Autrement dit :

$$\delta^{[10]} = 0 \quad (5.40)$$

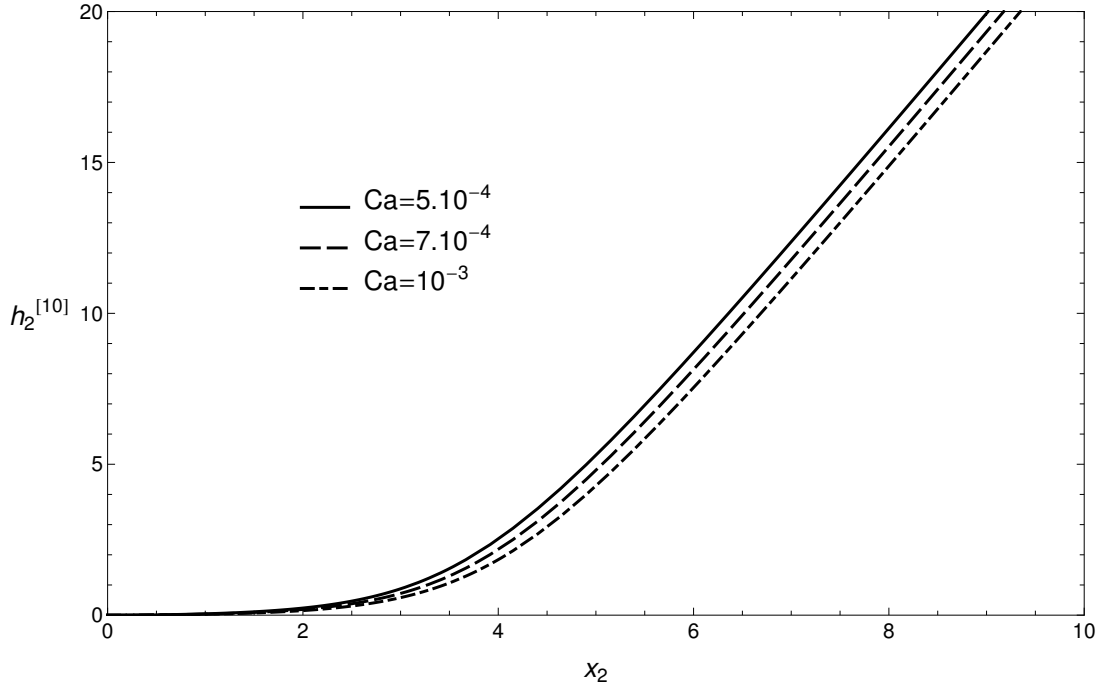


Figure 5.8: Correction de l'interface dans la région de transition au premier ordre en  $Ca^{1/3}$  en fonction de l'abscisse  $x_2$ .  $E = 10^{-4}$ .

Cependant, la condition (5.14) impose un coefficient  $B_1$  fini non nul et égal à la moitié de la correction du saut de pression à travers l'interface liquide-vapeur dans le ménisque, déjà connu grâce à la relation (5.6). L'équation d'interface (5.36) est donc résolue numériquement en utilisant les conditions aux limites suivantes, adimensionnées par  $\delta^{[00]}$  :

$$H_2^{[10]}(0) = d_x H_2^{[10]}|_{x=0} = 0 \quad (5.41a)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} H_2^{[10]} = -\frac{\Phi_1^{[20]}}{2} X + B_0 \quad (5.41b)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} d_x H_2^{[10]} = -\frac{\Phi_1^{[20]}}{2} \quad (5.41c)$$

Grâce à une résolution itérative utilisant la méthode de la sécante, il est possible d'approcher très rapidement la valeur de  $B_0$  permettant d'assurer que la fonction calculée soit effectivement affine à l'infini. La figure 5.8 présente les résultats de ces calculs pour plusieurs vitesses de déplacement du ménisque et une densité de flux de chaleur imposée à la paroi. La figure 5.9 représente quant à elle l'importance de la correction apportée au paramètre d'interface dans la région de transition par le premier ordre en fonction du nombre capillaire à la puissance un tiers.

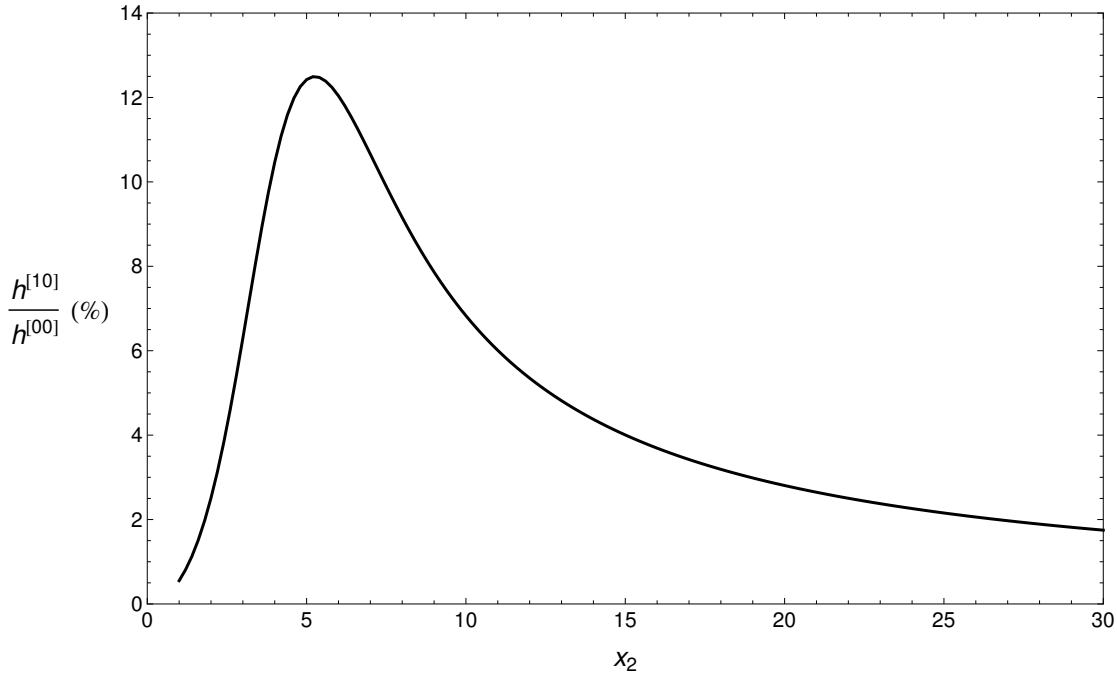


Figure 5.9: Correction de l'interface liquide-vapeur au premier ordre en  $Ca^{1/3}$  en fonction de la l'abscisse  $x_2$ .

La correction du paramètre d'interface au premier ordre en fonction du nombre capillaire est nulle dans le ménisque mais différente de zéro dans la région de transition. Pour des  $x_2$  grands, puisque que  $h_2^{[00]}$  est quadratique et  $h_2^{[10]}$  affine, la correction deviendra peu importante comparée à l'ordre principal, mais sera malgré tout bien présente. Ceci peut étonner, mais il faut cependant remarquer que ce sont les deux paramètres d'interface  $h_1$  et  $h_2$  qui sont raccordés asymptotiquement, et non les termes particuliers du développement en série de Taylor de ces paramètres. Les paramètres  $h_1^{[00]}$  et  $h_2^{[00]}$  à l'ordre principal ne se raccordent donc pas à une abscisse déterminée, de même que  $h_1^{[10]}$  et  $h_2^{[10]}$ . Il n'est donc pas possible de représenter sur la même figure les régions du ménisque et de la transition, du moins à cet ordre de calcul.

## 5.5 Film et transition aux ordres supérieurs en $Re$

La section précédente a permis de montrer que les conditions de raccordement entre la région du ménisque et la transition imposent une perturbation de l'interface à l'ordre [01] continument nulle.

Dans les modèles complets présentés dans les sections 2.4.2, 3.2.1 et 3.2.2, le nombre de Reynolds ou ses puissances n'est jamais présent sans être multiplié par le nombre capillaire. Il est donc normal que la perturbation de ces modèles soit identique pour des ordres de perturbation en Reynolds supérieurs à un, et des ordres de perturbation

en nombre capillaire inférieur à trois. Avant l'ordre  $[3i]$ , quel que soit l'entier  $i$ , aucun terme n'est ajouté au problème hormis les perturbations de l'interface qui sont fonction des termes inférieurs.

Pour l'ordre  $[11]$ , le terme inférieur est l'ordre  $[01]$ , pour lequel toutes les grandeurs physiques sont nulles, ce qui entraîne un modèle associé à l'ordre de perturbation  $[11]$ , présentée dans l'annexe E, identique à celui associé à l'ordre  $[01]$ , que ce soit dans la région de transition ou du film de liquide. Un raisonnement sur les conditions de raccordement identique à celui de la section précédente permet alors de conclure que toutes les grandeurs physiques exprimées à l'ordre  $[11]$  sont elles aussi continument égales à zéro.

Puisque les ordres  $[01]$  et  $[11]$  n'apportent aucune correction à la solution de l'ordre principal, le modèle associé à l'ordre de perturbation  $[21]$  est identique aux ordres inférieurs déjà résolus et déterminés comme n'apportant aucune correction à l'ordre principal. De même que pour les ordres inférieurs, les conditions de raccordement imposent alors une perturbation nulle de l'interface et de l'ensemble des grandeurs physiques du système à l'ordre  $[21]$ .

De proche en proche il est ainsi possible d'affirmer, de par la forme du modèle global qui est résolu ici, ainsi que la condition de raccordement entre le ménisque et la zone de transition, que tous les ordres de perturbation  $[ij]$ ,  $i$  étant compris entre 0 et 2 et  $j$  étant supérieur ou égal à 1, n'apporteront pas de correction à l'ordre principal.

De même que pour le modèle du ménisque, aucune information sur l'influence du nombre de Reynolds sur la forme de la bulle et toutes les grandeurs physiques en découlant ne peut donc être obtenue à ces niveaux de perturbation. Le premier ordre pour accéder à ce type d'information est l'ordre  $[31]$ , où la contribution explicite de la partie inertielle des équations de bilan hydrodynamique est introduite.

## 5.6 Film et transition au deuxième ordre en $Ca^{1/3}$

### 5.6.1 Film de liquide

D'après le problème dynamique associé au deuxième ordre de perturbation en fonction du nombre capillaire dans la région du film de liquide, présenté dans l'annexe E.2.5, la correction du champ de vitesse dans la région 3 à l'ordre  $[20]$  est nulle. Le bilan des contraintes normales à l'interface liquide-vapeur s'écrit quant à lui :

$$\Phi_3^{[20]} = 2h_3^{[00]} + 2d_{xx}h_3^{[00]} = 2h_3^{[00]} - \frac{2Bi_m (E_f \beta_a)^2}{(\beta_b + Bi_m h_3^{[00]})^3} \quad (5.42)$$

Il a été vu que le saut de pression à l'interface liquide-vapeur était constant à l'ordre principal dans le film de liquide déposé à la paroi, malgré la variation de la hauteur de film entraînant une courbure de l'interface. C'est à présent que va pouvoir être corrigé le saut de pression à l'interface liquide-vapeur à travers le terme  $\Phi_3^{[20]}$ .

Il a déjà été évoqué que la courbure de l'interface liquide-vapeur dans le film de liquide (le terme  $d_{xx}h_3^{[00]}$  dans l'équation (5.42)) est faible devant la hauteur liquide. En effet, le nombre de Biot modifié est très petit devant 1, et le paramètre  $E_f$  n'est jamais supérieur à  $10^{-1}$  dans les limites physiques du système. La correction du saut de pression varie donc quasi identiquement avec le double de la hauteur du film liquide, et il est possible d'écrire :

$$\Phi_3 \approx Ca^{2/3} h_3^{[00]} \quad (5.43)$$

L'équation d'interface associée à la perturbation au deuxième ordre en fonction du nombre capillaire est obtenue après la résolution du problème thermique associé :

$$d_x h_3^{[20]} = 2h_3^{[00]} d_x h_3^{[00]} + \frac{E_f \beta_a \left( 2h_3^{[00]} + Bi_m h_3^{[00]2} + Bi_m h_3^{[20]} \right)}{\left( \beta_b + Bi_m h_3^{[00]} \right)^2} - \frac{2E_f \beta_a h_3^{[00]}}{\beta_b + Bi_m h_3^{[00]}} \quad (5.44)$$

Cette équation possède la condition aux limites

$$h_3^{[20]}(0) = \delta^{[20]} \quad (5.45)$$

et admet comme solution :

$$\begin{aligned} h_3^{[20]} = \delta^{[20]} \frac{\beta_b + Bi_m \delta^{[00]}}{\beta_b + Bi_m h_3^{[00]}} + \frac{2E_f \beta_a x \left( 3 - 2\beta_b + Bi_m h_3^{[00]} \right)}{3Bi_m \left( \beta_b + Bi_m h_3^{[00]} \right)} \\ + \frac{\left( h_3^{[00]} - \delta^{[00]} \right) \left( 2Bi_m \beta_b (3 - 2\beta_b) - 2Bi_m \beta_b \delta^{[00]} - Bi_m^2 \delta^{[00]2} \right)}{3Bi_m \left( \beta_b + Bi_m h_3^{[00]} \right)} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Cette équation ainsi que ses dérivées évaluées en  $x_3 = 0$  sont prises comme conditions aux limites de l'équation d'interface de la région de transition à l'ordre [20], déterminée dans la section suivante. La correction  $\delta^{[20]}$  apportée à la hauteur initiale  $\delta^{[00]}$  du film de liquide déposé par le ménisque, inconnue pour l'instant, pourra être déterminée itérativement dans la section suivante grâce aux conditions de raccordement entre les régions du ménisque et de transition au deuxième ordre en  $Ca^{1/3}$ .

### 5.6.2 Région de transition

Un certain nombre de termes supplémentaires est ajouté à l'ordre [20] dans le modèle associé à la région de transition, en particulier dans les bilans de contraintes à l'interface liquide-vapeur. Le modèle complet à cet ordre est présenté dans l'annexe E.1.5, et l'équation d'interface est obtenue avec l'aide d'un logiciel de calcul formel suivant la procédure de résolution présentée dans la section 3.4.2 et représentée sur la figure 3.2.

L'équation d'interface ainsi obtenue, où la correction apportée au problème thermique par le premier ordre en  $Ca^{1/3}$  est nulle, s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}d_x \left( h_2^{[20]} h_2^{[00]3} d_{x^3} h_2^{[00]} \right) + d_x \left( h_2^{[20]} h_2^{[00]2} d_{x^3} h_2^{[00]} \right) - d_x h_2^{[20]} + d_x \mathcal{H}_1 \\ = \frac{E_{tr} Bi_m \beta_a h_2^{[20]}}{\left( \beta_b + Bi_m h_2^{[00]} \right)^2} + \frac{2E_{tr} \beta_a h_2^{[00]}}{\left( \beta_b + Bi_m h_2^{[00]} \right)} + \mathcal{H}_2 \quad (5.47) \end{aligned}$$

Les fonctions  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sont connues car uniquement dépendantes du paramètre d'interface à l'ordre principal  $h_2^{[00]}$  et de sa correction au premier ordre  $h_2^{[10]}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 = h_2^{[00]2} - \frac{1}{3}h_2^{[00]3} d_x h_2^{[00]} \left( -2 + 2d_{x^2} h_2^{[00]} + 6d_{x^2} h_2^{[00]2} + d_x h_2^{[00]} d_{x^3} h_2^{[00]} \right) \\ - \frac{1}{3}h_2^{[00]4} \left( d_{x^3} h_2^{[00]} (2 - 3d_{x^2} h_2^{[00]}) - 6d_x h_2^{[00]} d_{x^4} h_2^{[00]} \right) + \frac{8}{15}h_2^{[00]5} d_{x^5} h_2^{[00]} \\ + 2h_2^{[10]} \left( h_2^{[00]} h_2^{[10]} d_{x^3} h_2^{[00]} + h_2^{[00]2} d_{x^3} h_2^{[10]} \right) \quad (5.48a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2 = \frac{E_{tr} \beta_a}{\left( \beta_b + Bi_m h_2^{[00]} \right)^2} \left( d_x h_2^{[00]2} (\beta_b - Bi_m h_2^{[00]}) - h_2^{[00]} (2 + Bi_m h_2^{[00]}) \right) \\ - \frac{2E_{tr} \beta_a h_2^{[00]} d_{x^2} h_2^{[00]}}{\left( \beta_b + Bi_m h_2^{[00]} \right)^3} \left( 3 - 3Bi_m h_2^{[00]} + Bi_m^2 h_2^{[00]2} \right) \\ - \frac{2E_{tr} \beta_a d_x h_2^{[00]2}}{\left( \beta_b + Bi_m h_2^{[00]} \right)^4} \left( \beta_b - Bi_m h_2^{[00]} \right) \quad (5.48b) \end{aligned}$$

Cette équation différentielle est adimensionnée par la hauteur  $\delta^{[00]}$  à l'ordre principal comme suit :

$$h_2^{[20]}(x_2) = \delta^{[00]} H_2^{[00]}(X) \quad , \quad h_2^{[20]}(x_2) = \delta^{[00]} H_2^{[20]}(X) \quad \text{et} \quad x_2 + s = \delta^{[00]} X \quad (5.49)$$



Une étude asymptotique portant sur cette équation d'interface adimensionnée, effectuée suivant la methode présentée dans l'annexe C, montre cependant que la solution de l'équation (5.47) adimensionnée n'est pas quadratique pour des  $X$  grands, mais peut être modélisée par un polynôme d'ordre 4, c'est-à-dire :

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} H_2^{[20]}(X) = D_0 + D_1 X + D_2 \frac{X^2}{2} + D_3 \frac{X^3}{6} + D_4 \frac{X^4}{24} + o(1) \quad (5.50)$$

et donc :

$$\begin{aligned} \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} h_2^{[00]}(x_2) = & \left( D_0 \delta^{[00]} + D_1 s + \frac{D_2 s^2}{2 \delta^{[00]}} + \frac{D_3 s^3}{6 \delta^{[00]^2}} + \frac{D_4 s^4}{24 \delta^{[00]^3}} \right) \\ & + \left( D_1 + \frac{D_2 s}{\delta^{[00]}} + \frac{D_3 s^2}{2 \delta^{[00]^2}} + \frac{D_4 s^3}{6 \delta^{[00]^3}} \right) x_2 + \left( \frac{D_2}{2 \delta^{[00]}} + \frac{D_3 s}{2 \delta^{[00]^2}} + \frac{D_4 s^2}{4 \delta^{[00]^3}} \right) x_2^2 \\ & + \left( \frac{D_3}{6 \delta^{[00]^2}} + \frac{D_4 s}{6 \delta^{[00]^3}} \right) x_2^3 + \frac{D_4}{24 \delta^{[00]^3}} x_2^4 + o(1) \end{aligned} \quad (5.51)$$

Il est donc nécessaire de développer encore le terme de droite de la condition de raccordement (4.35) pour obtenir les conditions portant sur les termes d'ordres 3 et 4 de l'expression précédente, ce qui donne :

$$\frac{1}{2} d_{x^2} h_1^{[20]} \big|_{-l_0} = -\frac{\Phi_1^{[20]}}{4} = -\frac{1}{2} \left( \frac{D_2}{2 \delta^{[00]}} + \frac{D_3 s}{2 \delta^{[00]^2}} + \frac{D_4 s^2}{4 \delta^{[00]^3}} \right) \quad (5.52a)$$

$$\frac{1}{6} d_{x^3} h_1^{[10]} \big|_{-l_0} = 0 = -\frac{1}{2} \left( \frac{D_3}{6 \delta^{[00]^2}} + \frac{D_4 s}{6 \delta^{[00]^3}} \right) \quad (5.52b)$$

$$\frac{1}{24} d_{x^4} h_1^{[00]} \big|_{-l_0} = -\frac{1}{8} = -\frac{1}{2} \frac{D_4}{24 \delta^{[00]^3}} \quad (5.52c)$$

Ces relations permettent de déterminer les valeurs que doivent prendre les paramètres  $D_2$ ,  $D_3$  et  $D_4$  pour assurer le raccordement entre le ménisque et la zone de transition :

$$D_2 = 4 \delta^{[00]} A_1^2 - 2 A_0 \delta^{[00]^2} \quad (5.53a)$$

$$D_3 = 6 A_1 \delta^{[00]^2} \quad (5.53b)$$

$$D_4 = 6 \delta^{[00]^3} \quad (5.53c)$$

Ici  $A_1$  et  $A_0$  sont les paramètres associés au développement quadratique de  $H_2^{[00]}$  pour des  $X$  grands. Il est à présent possible d'utiliser comme à l'accoutumée une méthode de la sécante pour déterminer la valeur de  $\delta^{[20]}$ , satisfaisant ces trois conditions. En pratique,

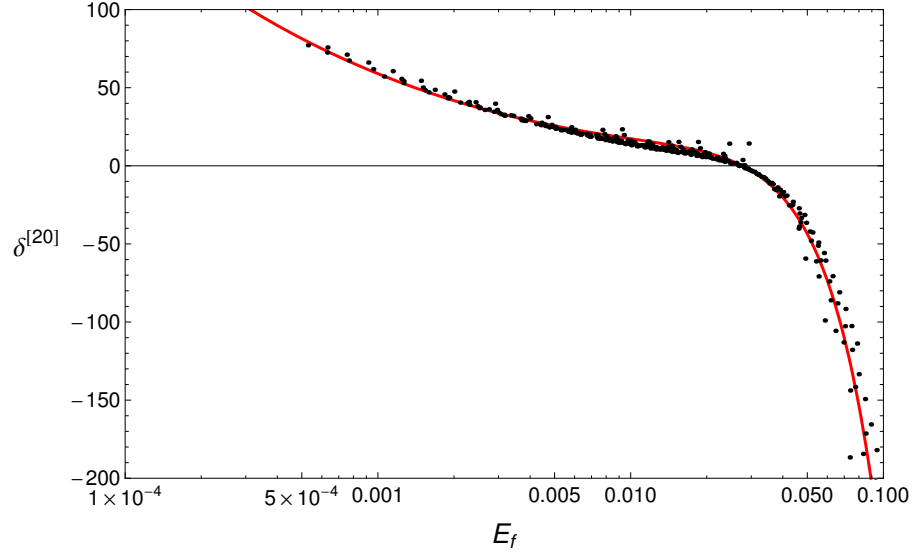


Figure 5.10: Coefficient de correction au deuxième ordre en  $Ca^{1/3}$  de la hauteur initiale de film de liquide déposé.

la valeur de  $\delta^{[20]}$  est variée pour trouver la solution  $h_2^{[20]}$  dont la forme polynomiale aux  $x_2$  grands satisfait la condition (5.52a). Il est ensuite vérifié que les conditions (5.52b) et (5.52c) sont bien satisfaites.

### 5.6.3 Résultats

La figure 5.10 représente les valeurs numériques de  $\delta^{[20]}$ , calculées pour différentes valeurs du coefficient  $E_f$ , issues de la résolution numérique de l'équation d'interface (5.47), ainsi que la fonction puissance qui les approxime. Cette corrélation a pour expression :

$$\delta^{[20]} = -30 + 8.8 E_f^{-1/3} + 1000 E_f - 35000 E_f^2 \quad (5.54)$$

Cette corrélation ne tend pas vers une valeur finie quand la densité de flux de chaleur imposée à la paroi tend vers zéro, à cause du terme en  $E_f^{-1/3}$ . Ceci pose une nouvelle restriction sur la densité de flux imposée minimale nécessaire pour la validité du modèle, après la restriction imposée par la forme du paramètre  $\beta_a$  dans l'inégalité (4.11). De plus, il semble que pour des nombres d'évaporation importants, la hauteur du film déposé se réduise de manière importante. À cause de la forme de la corrélation (5.54), il existe donc un nombre d'évaporation au-dessus duquel la hauteur initiale du film déposé serait nulle ou inférieure à zéro, ce qui impose à son tour une restriction sur la valeur maximale de la densité de flux imposée. La valeur maximale du nombre d'évaporation, pour la validité du modèle, dépend du nombre capillaire.

La corrélation globale portant sur la hauteur initiale de film déposé par le ménisque

en mouvement peut s'écrire comme suit, la hauteur  $\delta$  étant exprimée en mètre :

$$\frac{\delta}{R Ca^{2/3}} \approx \left(1.337 - 0.6 E_f^{4/3}\right) + \frac{Ca^{2/3}}{2} \left(-30 + 8.8 E_f^{-1/3} + 1000 E_f - 35000 E_f^2\right) + O(Ca, Re) \quad (5.55)$$

La correction apportée à la corrélation (4.44) de la hauteur de liquide à l'ordre principal est positive pour des nombres d'évaporation inférieurs à  $3.10^{-2}$ , ce qui veut dire que la hauteur de liquide déposé par le ménisque est plus importante que la hauteur de liquide déposé par un ménisque isotherme. En effet, la corrélation (4.44) n'apporte pas de modification significative à la corrélation de Bretherton adimensionnée  $\delta = 1.337$  à ces valeurs de nombre d'évaporation. Comment l'apport d'une densité de flux de chaleur à un film de liquide, générant de l'évaporation, pourrait augmenter l'épaisseur de ce film ? Pour répondre à cette question, il faut d'abord vérifier quelle est la correction apportée par le deuxième ordre de perturbation en  $Ca^{1/3}$  dans un modèle isotherme. Si cette correction augmente de manière importante la hauteur de film déposé par le ménisque, les résultats de notre modèle anisotherme s'en trouveront justifiés.

Park et Homsy [63] ont mis en place un modèle mathématique leur permettant de retrouver la corrélation de Bretherton dans une bulle isotherme en utilisant un développement asymptotique identique à celui présenté ici. Toutefois, leur développement s'arrête au premier ordre en fonction du nombre capillaire à la puissance un tiers, donnant comme ici une correction nulle. Aucune information sur la correction apportée par les termes en  $Ca^{2/3}$  au problème de la hauteur du film de liquide déposé par un ménisque reculant anisotherme n'a pu être trouvée dans la littérature.

Ce calcul a donc été effectué ici, pour la première fois à notre connaissance. Pour cela, deux choses sont à faire. D'abord, puisque le contexte de l'étude est ici isotherme, la densité de flux de masse évaporée est nulle. Il faut retirer la contribution de la partie thermique de l'équation d'interface, à chaque ordre de calcul. Pour l'ordre principal par exemple, l'équation d'interface dans la région de transition s'écrit :

$$\frac{1}{3}d_x(h^3 d_{x^3}h) + d_x h = 0 \quad (5.56)$$

Ensuite, le film de liquide déposé à la paroi par le ménisque est d'épaisseur constante, ce qui ne peut générer suffisamment de conditions aux limites pour résoudre cette équation d'interface. Il faut donc perturber légèrement le film d'épaisseur constante, grâce à une linéarisation de l'équation d'interface (5.56) quand  $x$  tend vers  $-\infty$ . Cette perturbation est expliquée en détail par Bretherton [12], et permet de déterminer une condition aux

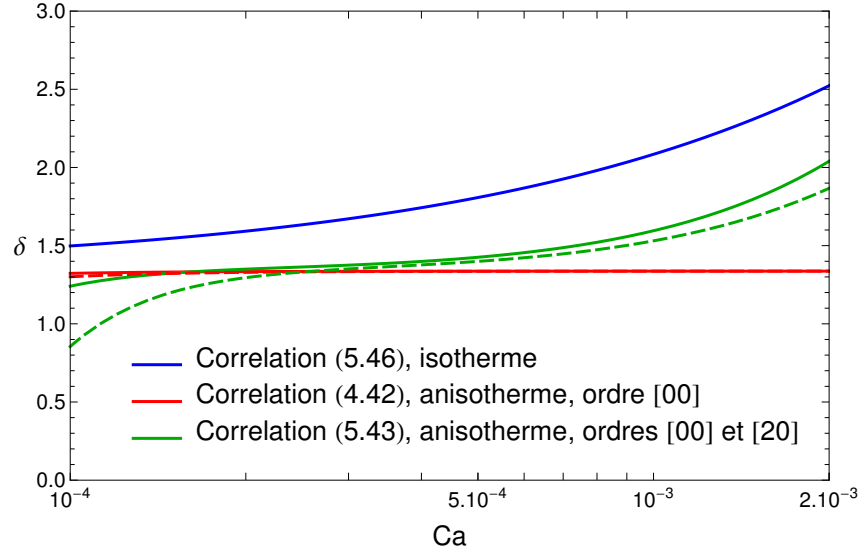


Figure 5.11: Comparaison entre les corrélations isotherme et anisotherme portant sur la hauteur adimensionnée de film déposé  $\delta$ . Traits pleins :  $\varphi_{in} = 5 \text{ kW.m}^{-2}$ , pointillés :  $\varphi_{in} = 10 \text{ kW.m}^{-2}$ .

limites de l'équation d'interface :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \delta_0 + A \exp(3^{1/3} x) \quad (5.57)$$

Le coefficient  $A$  peut être défini arbitrairement puisque l'équation d'interface (5.56) est invariante par translation suivant l'abscisse  $x$ . Une même perturbation permet de déterminer que cette condition aux limites est aussi valable pour résoudre les équations d'interface aux premier et deuxième ordres en  $Ca^{1/3}$ .

La corrélation découlant de ces calculs isothermes prenant en compte la correction des termes facteurs de  $Ca^{2/3}$  est la suivante :

$$\delta_{iso} \approx 1.337 + 149.43 \frac{Ca^{2/3}}{2} + O(Ca) \quad (5.58)$$

La correction apportée par le deuxième ordre en  $Ca^{1/3}$  n'est donc pas forcément négligeable, en particulier pour des nombres capillaires relativement importants. Cette correction est de surcroît positive, c'est-à-dire que le film de liquide déposé par un ménisque dans un contexte isotherme possède une hauteur plus importante que le laisse suggérer la corrélation de Bretherton.

Pour comparer les différentes corrélations évoquées ici, celles-ci sont tracées en fonction du nombre capillaire  $Ca$  et représentées sur la figure 5.11. Sur la plage de nombre capillaire

considérée, la corrélation (5.54) incluant les effets d'une densité de flux de chaleur constante donne des valeurs toujours inférieures à celles fournies par la corrélation isotherme (5.58). Une densité de flux de chaleur imposée à la paroi a donc bien pour effet de réduire la hauteur du film de liquide déposé derrière le ménisque. Quand le nombre capillaire diminue, l'influence de la partie thermique du modèle prend de l'importance à travers un nombre d'évaporation en augmentation, à  $\varphi_{in}$  fixée. Le deuxième ordre en  $Ca^{1/3}$  peut donc induire une réduction importante de la hauteur  $\delta$ . Bien sûr, plus la densité de flux de chaleur imposée est importante, plus le nombre d'évaporation est grand, et son influence se fait d'autant plus sentir (courbes pointillées). À l'inverse, des valeurs de nombre capillaire importantes entraînent une réduction de l'influence relative du nombre  $E$  (et donc de  $\varphi_{in}$ ), bien que la correction apportée par l'ordre [20] soit malgré tout non négligeable.

La réduction du champ de validité du modèle peut quand à elle être relativement importante, sans pour autant empiéter significativement sur la plage de fonctionnement d'un caloduc oscillant. Cette limitation est la suivante, avec de l'eau comme fluide de travail :

Eau

$$\begin{array}{lll} Ca = 10^{-4}, 5.10^{-4} < E_f < 0.2 & : & U_m = 1.7 \text{ cm.s}^{-1} & : & \varphi_{in} < 17 \text{ kW.m}^{-2} \\ Ca = 2.10^{-3}, 5.10^{-4} < E_f < 0.2 & : & U_m = 34 \text{ cm.s}^{-1} & : & 6 \text{ kW.m}^{-2} < \varphi_{in} \end{array}$$

Pour de faibles niveaux de vitesse, la limitation basse imposée à la densité de flux de chaleur à la paroi est celle de l'expression du paramètre  $\beta_a$  (inégalité 4.11). En revanche, la limite haute est relativement contraignante. À l'inverse, quand la vitesse augmente, le modèle ne pourra pas modéliser de manière satisfaisante les faibles contraintes thermiques appliquées à la paroi.

## 5.7 Conclusion

Un bilan intermédiaire sur la montée en ordre dans la région du ménisque a déjà été effectué dans la section 5.3. La seule correction non nulle de l'interface liquide-vapeur dans cette région a été trouvée pour l'ordre [20]. Pour progresser dans la définition physique de cette région, il faut résoudre une équation biharmonique sur la fonction de courant associée au champ de vitesse à l'ordre principal, qu'il n'a pas été possible d'effectuer ici, à cause des temps de calcul très importants. Pour la même raison, les corrections du champ de température calculé au chapitre 4 n'ont pu être obtenues.

Si ce mémoire ne peut présenter de résultats sur les champs de vitesse et de température dans la région du ménisque, le cadre théorique pour les obtenir est cependant parfaitement défini.

En revanche, la connaissance de la correction  $h_1^{[20]}$  nous a permis de résoudre complètement les modèles du film et de transition à cet ordre de perturbation. Il a donc pu être déterminée une correction à la hauteur du film déposé à l'ordre [20]. Une nouvelle

corrélation a été définie, ainsi qu'une correction de la corrélation isotherme de Bretherton [12]. Cette correction dans un contexte isotherme n'avait, à notre connaissance, pas été effectuée précédemment, et montre une augmentation sensible de la valeur calculée de la hauteur de film déposé, en particulier pour de fortes vitesses. Cependant, il n'est pas exclu que des calculs effectués aux ordres supérieurs pondère de manière importante ces résultats, en particulier en prenant en compte les effets inertiels. Il a d'ailleurs déjà été montré expérimentalement par Han et Shikazono [32, 33] que ces effets inertiels sur la hauteur de film initialement déposé par un ménisque pouvaient être important.

Il reste à présent à nous intéresser à la partie arrière de la bulle, où un ménisque avance, soit sur un film de liquide micrométrique, soit sur un film adsorbé.



# Chapitre 6

## Ménisque arrière - Ordre principal

### 6.1 Ménisque avançant sur un film mince déposé

#### 6.1.1 Bourrelets de liquide

Puisque les régions de résolution 1 et 5, associées aux ménisques avant et arrière, et les régions 2 et 4, associées aux transitions entre le film de liquide et les deux ménisques possèdent respectivement les mêmes modèles, les équations d'interface associées aux régions 4 et 5 à n'importe quel ordre sont identiques aux équations d'interface respectives des régions 2 et 1 aux ordres considérés. Les différences entre les parties avant et arrière de la bulle de vapeur sont dues aux conditions aux limites utilisées pour résoudre ces équations d'interface, ainsi que le domaine de résolution. En effet, si dans la région 2 l'équation (4.25) est résolue pour des  $x_2$  positifs, la position du repère associé à la région de résolution numéro 4 entraîne une résolution de cette même équation d'interface (écrite dans la région 4) pour des  $x_4$  négatifs. Enfin, l'état du film de liquide est déjà entièrement connu, puisque la hauteur  $\delta$  a été déterminée dans le chapitre précédent. La longueur  $L_f$  séparant les repères associés aux régions 3 et 4 détermine donc exactement les conditions aux limites appliquées à l'équation d'interface.

Cette équation d'interface associée à la zone de transition entre le ménisque arrière et le film de liquide déposé sur la paroi par le ménisque avant à l'ordre principal est la suivante :

$$-\frac{1}{3} d_x \left( h_4^{[00]3} d_{x^3} h_4^{[00]} \right) + d_x h_4^{[00]} = \frac{E_{tr} \beta_a}{\beta_b + Bi_m h_4^{[00]}} \quad (6.1)$$

Cette équation est résolue pour des abscisses  $x_4$  négatives, en utilisant les conditions



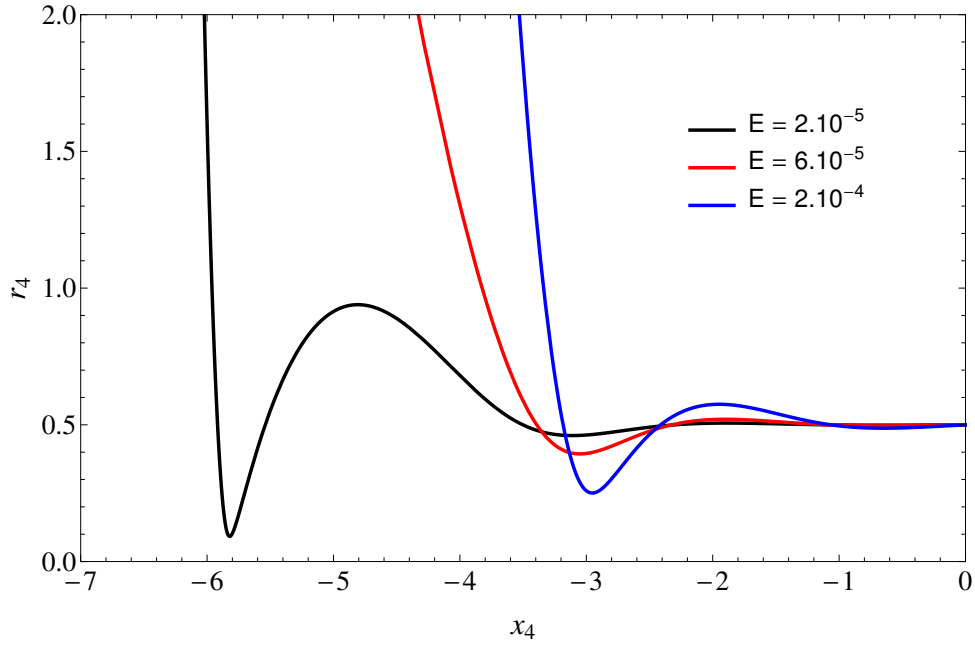


Figure 6.1: Profils d'interface de la région de transition arrière (région 4) pour différents nombres d'évaporation.  $Ca = 7.10^{-4}$ .

aux limites suivantes :

$$h_4^{[00]}(0) = h_3^{[00]}(L_f) = \delta'^{[00]} \quad (6.2a)$$

$$d_x h_4^{[00]}|_0 = d_x h_3^{[00]}|_{L_f} \quad (6.2b)$$

$$d_{x^2} h_4^{[00]}|_0 = d_{x^2} h_3^{[00]}|_{L_f} \quad (6.2c)$$

$$d_{x^3} h_4^{[00]}|_0 = d_{x^3} h_3^{[00]}|_{L_f} \quad (6.2d)$$

La résolution numérique de cette équation met en évidence la création d'un bourrelet de liquide entre le film de liquide et le ménisque, comme représenté sur la figure 6.1. La taille de ce bourrelet de liquide est fortement dépendante de quatre paramètres distincts : la densité de flux de chaleur imposée à la paroi, la vitesse de la bulle, la température de saturation de la phase vapeur, et la longueur du film de liquide déposé par le ménisque avant. L'influence de la longueur du film de liquide déposé auquel se rattache le ménisque arrière est évidente puisque ce film s'évapore sur toute sa longueur, et la hauteur du film de liquide est donc différente si la bulle est petite, c'est-à-dire si le ménisque arrière arrive rapidement derrière le ménisque avant déposant ce film de liquide, ou si la bulle est grande et que le film de liquide a eu le temps de s'évaporer en partie.

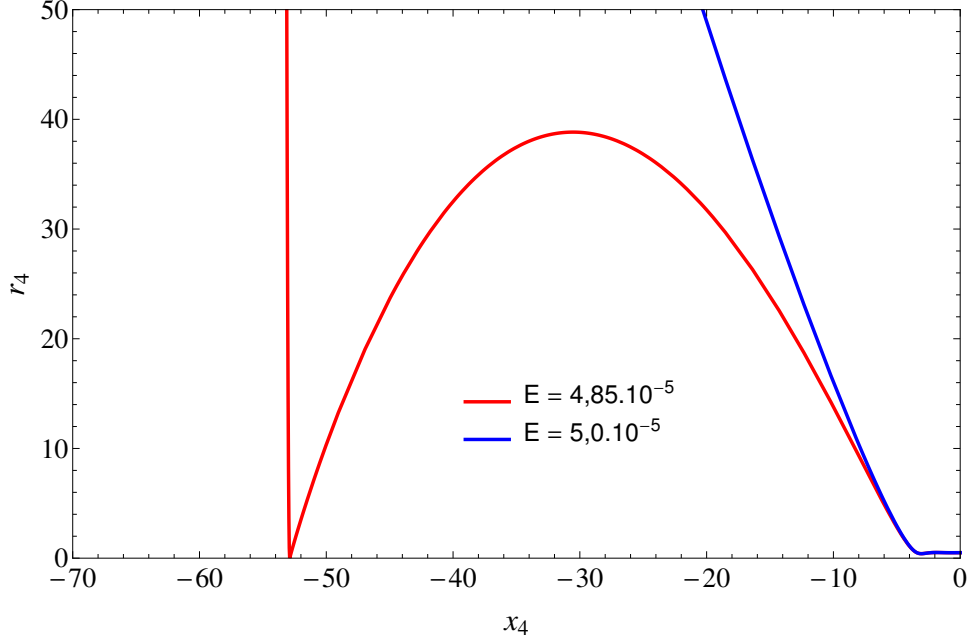


Figure 6.2: Profil de la zone de transition arrière pour deux nombres d'évaporation. La courbe bleue possède une courbure positive : l'imposant bourrelet a disparu.  $Ca = 7.10^{-4}$ .

Dans cette partie ne sont considérées que des longueurs de bulle inférieures à la longueur d'assèchement calculée dans la section 4.5. Au delà de cette longueur, la paroi est asséchée et le ménisque arrière avance sur un film adsorbé, cas de figure qui sera abordé dans la section 6.2.

En fixant la température de saturation de la phase vapeur et en définissant la longueur de film comme une fraction constante de la longueur d'assèchement, la taille du bourrelet peut grandement varier suivant les valeurs prises par le couple de paramètres  $(\varphi_{in}, U_m)$ . Pour certaines valeurs du nombre d'évaporation, variables en fonction du nombre capillaire, une discontinuité dans la taille de ces bourrelets apparaît. Une telle discontinuité est représentée dans la figure 6.2. Pour un même nombre capillaire, et pour deux nombres d'évaporation proches, les solutions de l'équation (6.1) présentent des profils d'interface très différents. La principale différence est la valeur de la courbure des deux interfaces. En effet, la courbe bleue possède rapidement une courbure positive, ce qui empêche la formation du bourrelet. Les figures 6.1 et 6.2 présentent à eux deux la variation de la taille du bourrelet en fonction du nombre d'évaporation, pour un nombre capillaire fixe. Tout se passe comme si le bourrelet grandissait dans de telles proportions qu'il devenait en fait le ménisque en soi, laissant les ondulations de l'interface avant le développement du bourrelet devenir le bourrelet, qui par la même est de petite taille.

Pour caractériser la présence de cette discontinuité dans les solutions de l'équation d'interface dans la transition arrière, la vitesse de la bulle est à son tour imposée, ce qui fixe la valeur du nombre capillaire. En faisant varier la densité de flux de chaleur imposée, les hauteurs minimale et maximale du bourrelet de liquide sont mesurées et

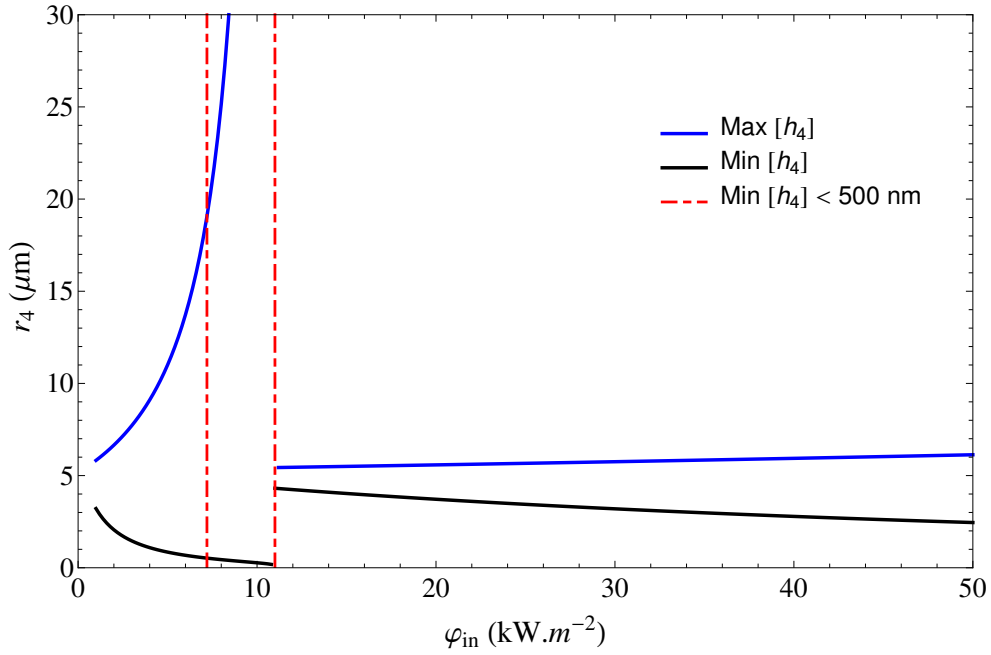


Figure 6.3: Hauteurs minimale et maximale du bourrelet de liquide en fonction de la densité de flux imposée à la paroi.  $Ca = 7.10^{-4}$ .

reportées sur la figure 6.3. Cette figure fait clairement apparaître la discontinuité dans la taille du bourrelet, ainsi que la taille très importante que celui-ci peut prendre pour certaines valeurs de nombre d'évaporation. En augmentant encore la valeur de la densité de flux de chaleur imposée, il est possible d'observer à nouveau une discontinuité dans la taille du bourrelet de liquide. Ce phénomène est donc répétitif et semble lié de manière complexe aux valeurs prises par le couple de paramètres  $(\varphi_{in}, U_m)$ .

Plus la hauteur de ce bourrelet est importante, plus la hauteur de liquide est faible à la jonction du bourrelet et du ménisque. A tel point que se pose la question de la réalité physique de ces bourrelets de grande taille. En effet, les longueurs caractéristiques de la région de transition, qui servent à simplifier le modèle associé à cette région, ne sont clairement pas respectées par ce type de solution. Les effets capillaires, qui devraient être prépondérants dans de telles géométries d'interface, ne sont pas proprement représentés par le modèle tel qu'il est écrit, où viscosité et capillarité sont supposées de même importance.

De plus, la hauteur de liquide à la jonction du bourrelet de liquide et du ménisque peut devenir tellement faible que les forces de dispersion, qui ne sont pas prises en compte dans le modèle présenté ici, deviennent non négligeables. La physique du bourrelet de liquide ne pourra donc être correctement modélisée qu'en prenant en compte la pression de disjonction dans le bilan des contraintes normales à l'interface. Le modèle présenté ici ne peut prétendre modéliser la région de transition arrière d'une bulle dans cette plage de paramètre. La figure 6.3 présente ainsi, entre les deux barres pointillées rouge, la plage de paramètres pour lesquels la hauteur de liquide minimale est de l'ordre de quelques

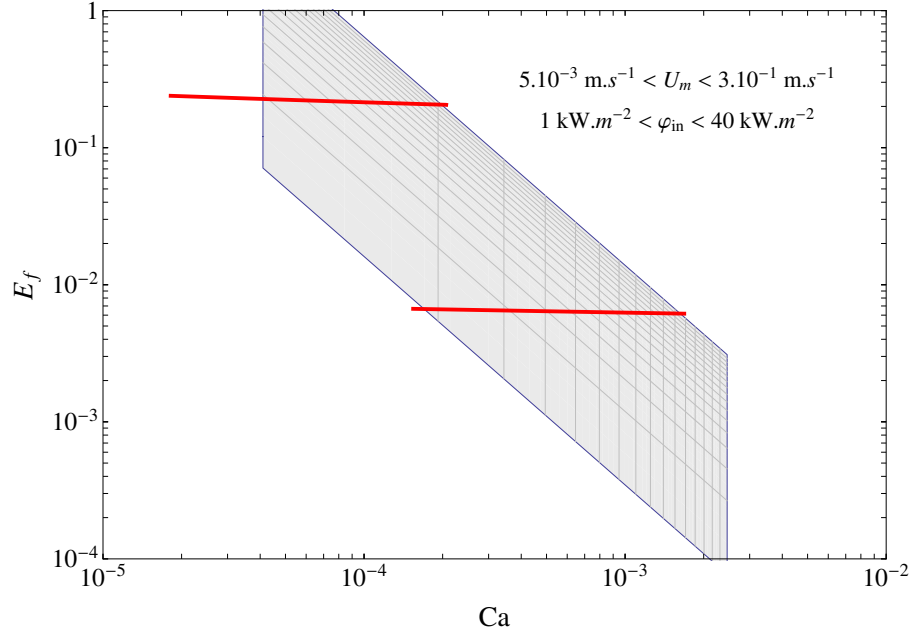


Figure 6.4: Discontinuités dans la taille des bourrelets de liquide dans le plan  $(Ca, E_f)$ . La région grisée représente la plage de paramètre évaluée, pour de l'eau.

centaines de nanomètres.

En étendant l'analyse paramétrique à différentes valeurs de nombre capillaire, ainsi que différentes valeurs de température de saturation et fraction de la longueur d'assèchement  $L_f/L_{dry}$ , il est possible de constater que les paramètres  $T_{sat}$  et  $L_f/L_{dry}$  n'ont pas d'influence importante sur la position de la discontinuité dans le plan  $(Ca, E_f)$ . En revanche, la figure 6.4 indique que les discontinuités dans la taille du bourrelet de liquide sont uniquement observées pour des valeurs particulières du nombre d'évaporation modifié  $E_f$ . Les lignes matérialisées en rouge sur cette figure marquent en effet les valeurs de  $E_f$  présentant une telle discontinuité, approximativement pour  $E_f = 0.2$  et  $E_f = 7.10^{-3}$ .

La zone grisée de cette figure 6.4 représente les plages de paramètres de vitesse de ménisque et de densité de flux de chaleur qu'il est possible de rencontrer dans un caloduc oscillant utilisant de l'eau. Pour de l'éthanol par exemple, pour lequel les mêmes calculs ont été effectués, la viscosité dynamique plus importante entraîne des valeurs de nombre capillaire plus importantes pour des vitesses de ménisque comprises entre  $5 \text{ mm.s}^{-1}$  et  $30 \text{ cm.s}^{-1}$ . Cependant la discontinuité dans la taille du bourrelet de liquide est toujours observée pour les mêmes valeurs du nombre  $E_f$ .

Le nombre  $E_f$  n'apparaît pas dans l'équation d'interface (6.1), mais plutôt dans les conditions aux limites qui sont appliquées à cette équation. Ce fait semble indiquer que c'est l'état du film de liquide au moment où le ménisque arrière le remouille qui contrôle l'établissement et la forme du bourrelet de liquide avant le passage du ménisque, et non l'état du ménisque lui-même.

### 6.1.2 Raccord avec le ménisque

À l'ordre principal, l'équation d'interface associée à la région de résolution numéro 5 est identique à celle de la région de résolution 1 (équation 4.1) :

$$\Phi_5^{[00]} + 1 = \frac{1}{h_5^{[00]} \left(1 + d_x h_5^{[00]2}\right)^{1/2}} - \frac{d_{x^2} h_5^{[00]}}{\left(1 + d_x h_5^{[00]2}\right)^{3/2}} = \text{Constante} \quad (6.3)$$

La résolution s'effectue par contre pour des  $x_5$  positifs, quand l'équation d'interface (4.1) du ménisque avant est résolue pour des  $x_1$  négatifs, ce qui donne comme expression du paramètre d'interface dans la région du ménisque arrière :

$$h_5^{[00]}(x_5) = \left(R_5^2 - (x_5 - R_5)^2\right)^{1/2} \quad \text{avec} \quad R_5 = \frac{2}{\Phi_5^{[00]} + 1} \quad (6.4)$$

Rien en revanche ne permet de conclure que le rayon de courbure de la portion de sphère modélisant le ménisque arrière est égale au rayon du tube capillaire contenant la bulle, comme pour le ménisque avant. Par ailleurs, le profil de la zone de transition arrière est déjà entièrement connu, ce qui impose la courbure de l'interface dans la région 4 pour des valeurs de  $x_4$  tendant vers  $-\infty$ .

Pour cette raison il a déjà été évoqué dans la section 3.5.3 l'introduction d'une troisième inconnue, devant être ajoutée aux deux inconnues  $R_5$  et  $l_1$  déjà présentes dans le modèle, représentant la distance axiale entre le repère associé à la région 5 et l'intersection entre la paroi du tube capillaire et une sphère de rayon  $R_5$ . Dans ce cas, la condition de raccordement entre la région du ménisque arrière et la région de transition arrière est l'équation (3.40) qui est reproduite ici :

$$\lim_{x_4 \rightarrow -\infty} \left(1 - C a^{2/3} h_4(x_4)\right) = \lim_{x_5 \rightarrow -L_1} h_5(x_5) \quad (6.5)$$

Puisque l'équation d'interface (6.1) possède une formulation identique à l'équation d'interface (4.25) associée à la région de transition avant, l'étude asymptotique présentée dans l'annexe C permet de montrer que le paramètre d'interface  $h_4$  est quadratique quand  $x_4 \rightarrow -\infty$ .

$$\lim_{x_4 \rightarrow -\infty} h_4(x_4) = \left(A_0 \delta^{[00]} + A_1 s + \frac{A_2 s^2}{2 \delta^{[00]}}\right) + \left(A_1 + \frac{A_2 s}{\delta^{[00]}}\right) x_4 + \frac{A_2}{\delta^{[00]}} \frac{x_4^2}{2} + o(1) \quad (6.6)$$

Comme pour l'étude de la partie avant de la bulle, le terme de droite de l'équation

(6.5) est développé en série de Taylor au voisinage de la paroi solide, c'est-à-dire quand  $x_5 = L_1$ .

$$h_5(x_5) = h_5(L_1) + (x_5 - L_1) d_x h_5|_{L_1} + \frac{(x_5 - L_1)^2}{2} d_{x^2} h_5|_{L_1} + o(1) \quad (6.7)$$

En revanche, la définition (3.5) donnant la relation entre  $x_4$  et  $x_5$  est exprimée en fonction de la longueur  $l_1$ , l'équation (6.7) peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$h_5(x_5) = h_5(L_1) + (Ca^{1/3} x_4 - l_1 - L_1) d_x h_5|_{L_1} + \frac{(Ca^{1/3} x_4 - l_1 - L_1)^2}{2} d_{x^2} h_5|_{L_1} + o(1) \quad (6.8)$$

ou encore :

$$h_5(x_5) = h_5(L_1) - (l_1 + L_1) d_x h_5|_{L_1} + \frac{(l_1 + L_1)^2}{2} d_{x^2} h_5|_{L_1} + Ca^{1/3} x_4 (d_x h_5|_{L_1} - (l_1 + L_1) d_{x^2} h_5|_{L_1}) + \frac{1}{2} Ca^{2/3} x_4^2 d_{x^2} h_5|_{L_1} + o(1) \quad (6.9)$$

En suivant la même démarche que dans la section 4.4, il est possible d'écrire les trois équations de raccord entre la région du ménisque arrière et la transition arrière à l'ordre principal :

$$h_5^{[00]}(L_1) - (l_1 + L_1) d_x h_5^{[00]}|_{L_1} + \frac{(l_1 + L_1)^2}{2} d_{x^2} h_5^{[00]}|_{L_1} = 1 \quad (6.10)$$

A l'ordre  $Ca^{1/3} Re^0$  :

$$d_x h_5^{[00]}|_{L_1} - (l_1 + L_1) d_{x^2} h_5^{[00]}|_{L_1} = 0 \quad (6.11)$$

A l'ordre  $Ca^{2/3} Re^0$  :

$$\frac{1}{2} d_{x^2} h_5^{[00]}|_{-L_1} = -\frac{A_2}{2\delta^{[00]}} \quad (6.12)$$

Ce système de trois équations à trois inconnues ( $R_5$ ,  $L_1$  et  $l_1$ ) ne possède pas de solutions pour des valeurs du coefficient  $A_2$  inférieur à 1. L'équation (6.12) indique que ce coefficient est égal à la deuxième dérivée du profil du ménisque arrière. Une deuxième dérivée inférieure à 1 engendrerait une courbure de l'interface elle-même inférieure à 1, ce qui n'est pas possible dans notre cas puisque le raccordement présenté plus haut suppose une intersection entre le profil théorique du ménisque arrière et la paroi du capillaire.

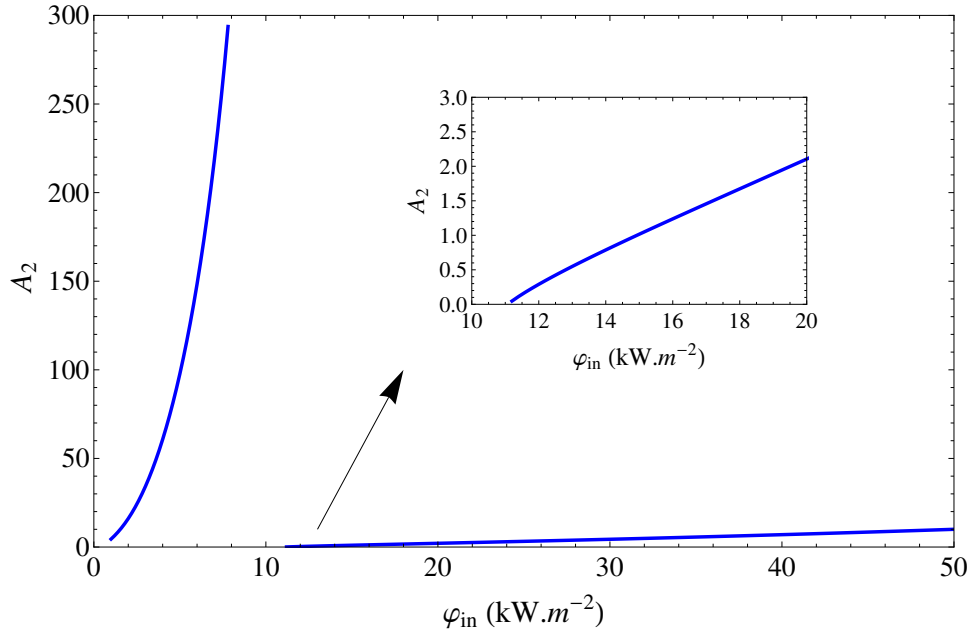


Figure 6.5: Coefficients  $A_2$  de la forme quadratique de la zone de transition proche du ménisque arrière en fonction de la densité de flux de chaleur imposée.  $Ca = 7.10^{-4}$ .

Or, la figure 6.5 montre que, pour des densités de flux de chaleur immédiatement supérieures à la discontinuité, le coefficient  $A_2$  est inférieur à 1, avant d'augmenter et de dépasser cette valeur. La courbure de l'interface dans la région de transition, pour ces valeurs de densités de flux de chaleur, est trop faible pour que le présent raccordement puisse s'effectuer.

La figure 6.6 confirme ce résultat en représentant les résultats de la résolution du système d'équations (6.10,6.11,6.12), portant sur le rayon du ménisque arrière de forme sphérique, dans les mêmes conditions que pour la figure 6.3. Les deux barres rouges matérialisent de nouveau la plage de paramètres pour laquelle la résolution de l'équation d'interface (6.1) génère des bourrelets de liquide de trop grande taille pour être physiquement admissibles. Les barres vertes, quant à elles, marquent la plage de paramètres pour laquelle un raccordement avec le ménisque arrière n'est pas possible, car la courbure de l'interface liquide-vapeur dans la zone de transition est inférieure à 1. La taille de cette plage de paramètres est très variable, et ne peut être liée simplement au nombre d'évaporation modifié  $E_f$  comme c'est le cas pour la discontinuité dans la taille du bourrelet de liquide présentée par la figure 6.4.

### 6.1.3 Limites de validité du modèle établi

Le traitement analytique relativement classique, présenté ici, d'un ménisque avançant sur un film de liquide d'épaisseur micrométrique précédemment déposé, montre ainsi ses limites. Non seulement la résolution des équations classiques de la dynamique dans des

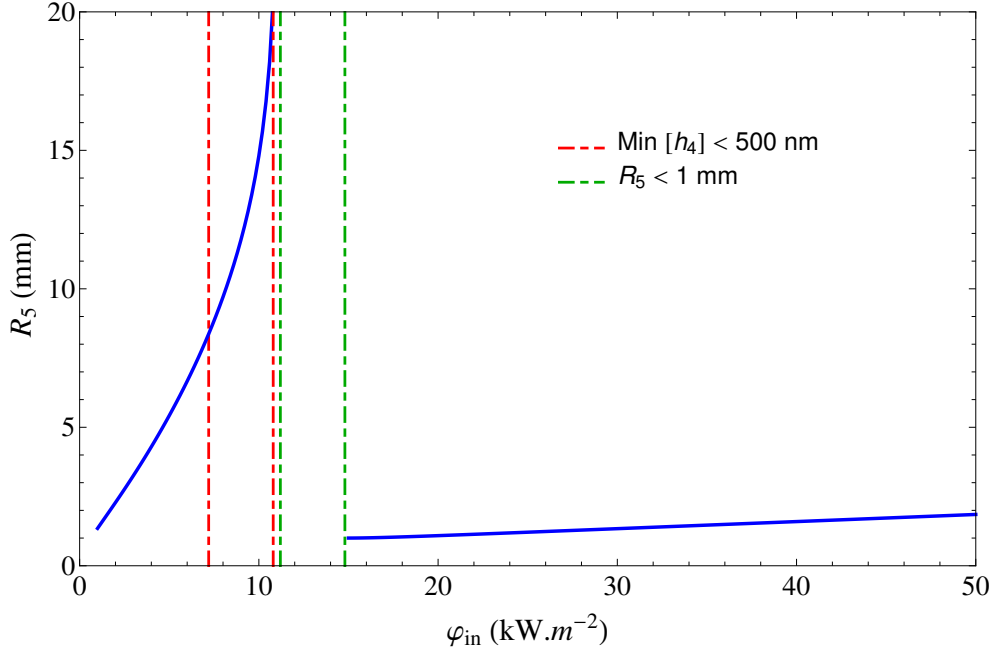


Figure 6.6: Rayon de courbure du ménisque arrière en fonction de la densité de flux de chaleur imposée.  $Ca = 7.10^{-4}$ .

films, possédant des formes rappelant les hypothèses de lubrification, est prise en défaut par l'apparition de solutions physiquement inadmissibles, mais de plus certaines autres solutions ne peuvent admettre de raccordement avec un ménisque uniquement régi par les forces capillaires.

Cette supposition de la prédominance de la capillarité génère nécessairement un ménisque sphérique de rayon supérieur ou égal au rayon du tube capillaire. Des rayons de ménisque inférieurs sont, en l'état actuel des techniques classiques de résolution de ces problèmes dynamiques, impossibles à raccorder avec une autre région de résolution, quelle qu'elle soit.

Pour des tubes de dimension suffisamment faible, où les forces capillaires ont un effet grandement supérieur aux forces de gravité ou d'inertie de la phase liquide, la supposition d'un ménisque avançant sur un film de liquide et possédant un rayon égal au rayon du tube capillaire est envisageable. Dans ce contexte, l'étude asymptotique de Kalliadasis [41] prend tout son sens. Cependant cette étude aboutit ultimement au raccordement des solutions successives, de région de résolution en région de résolution, avec un film adsorbé d'épaisseur nanométrique. Le raccordement avec un film d'épaisseur micrométrique, où l'effet des forces visqueuses est bien supérieur à celui des forces de dispersion, paraît beaucoup plus difficile, en particulier dans le contexte de l'étude de la dynamique d'une bulle complète où le film de liquide est déjà défini par la résolution de la partie avant de cette bulle.

En conclusion, si la dynamique d'un ménisque reculant dans un tube de dimension



capillaire et déposant derrière lui un film de liquide commence aujourd'hui à être bien appréhendée et modélisée, il n'en est pas de même d'un ménisque remouillant un film d'épaisseur micrométrique, en particulier dans un contexte anisotherme. La mise en place de nouvelles techniques de résolutions pour ces problèmes semble s'imposer même si, pour le moment, celles-ci ne sont qu'embryonnaires.

## 6.2 Ménisque avançant sur un film adsorbé

### 6.2.1 Equation d'interface

Pour modéliser la dynamique d'un ménisque avançant sur un film adsorbé, il est nécessaire de prendre en compte une région de transition entre le ménisque et ce film d'épaisseur constante nanométrique. La physique de cette région de transition se distingue des modèles de transition évoqués jusqu'à présent par la prise en compte de deux phénomènes physiques supplémentaires.

Tout d'abord, un terme modélisant la pression de disjonction s'exerçant sur l'interface liquide-vapeur est ajouté au bilan des contraintes normales à cette interface. Ensuite, la contribution du saut de pression à travers l'interface est ajoutée dans l'équation de Hertz-Knudsen.

L'effet de la pression de disjonction sur l'interface liquide-vapeur, ainsi que sa contribution dans la formation d'un film adsorbé, ont déjà été évoqués dans le premier chapitre de ce mémoire. Le bilan des contraintes normales à l'interface a pour expression, à l'ordre principal du développement suivant  $Ca^{1/3}$  et  $Re$  (les exposants associés à ce développement sont omis pour plus de clarté) :

$$\Phi + 1 = 1 + d_{x^2}h + \frac{\epsilon^2}{h^3} \quad (6.13)$$

Le coefficient  $\epsilon$  est un adimensionnement de la constante de dispersion :

$$\epsilon = \frac{\sigma}{\mu U_m} \sqrt{\frac{\bar{A}}{\sigma R^2}} \quad (6.14)$$

L'équation de Hertz-Knudsen s'écrit quant à elle, de manière non dimensionnelle, à partir de l'expression (A.24) :

$$\Gamma^{lg} = A(T - T_{sat}) - B(\Phi + 1) \quad (6.15)$$

Les coefficients  $A$  et  $B$  sont définis à partir des coefficients  $a$  et  $b$  donnés par les équations (A.23a) et (A.23b), qui sont adimensionnés pour donner :

$$A = a \frac{R h_{lg}}{\lambda} Ca^{2/3} \quad (6.16a)$$

$$B = b \frac{\sigma h_{lg}}{R \varphi_{in}} \quad (6.16b)$$

Le reste du modèle est identique à celui de la région de transition à l'ordre principal présenté dans la section 4.3, ce qui entraînent une expression du champ de vitesse axiale dans la région de transition de la forme :

$$U = -d_x \Phi \left( \frac{r^2}{2} - h r \right) - 1 \quad (6.17)$$

Ce qui aboutit à l'expression de la densité de flux de masse liquide suivante :

$$\Gamma = \frac{1}{3} h^3 d_x \Phi - h \quad (6.18)$$

De son côté, le champ de température dans cette région s'écrit sous la forme :

$$T = -\Gamma^{lg} r + \frac{1 - \Gamma^{lg}}{Bi_m} \quad (6.19)$$

L'introduction de cette expression dans l'équation de Hertz-Knudsen (6.15) donne la densité de flux de masse évaporée à l'interface liquide-vapeur :

$$\Gamma^{lg} = \frac{\beta_c - B' \Phi}{\beta_b + Bi_m h} \quad (6.20)$$

où les paramètres  $B'$ ,  $\beta_b$  et  $\beta_c$  sont définis par :

$$\left. \begin{aligned} B' &= \frac{B Bi_m}{A} \\ \beta_b &= 1 + \frac{B Bi_m}{A} \\ \beta_c &= 1 - Bi_m T_{sat} - B' \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

Grâce au bilan de masse (3.21b) du modèle de transition, écrit à l'ordre principal, et au bilan des contraintes (6.13), le modèle paramétrant l'interface liquide-vapeur dans la

région de transition entre un ménisque avançant et un film adsorbé peut s'écrire :

$$-\frac{1}{3}d_x(h^3 d_x \Phi) + d_x h = E_{tr} \frac{\beta_c - B' \Phi}{\beta_b + Bi_m h} \quad (6.22a)$$

$$\Phi = d_{x^2} h + \frac{\epsilon^2}{h^3} \quad (6.22b)$$

### 6.2.2 Conditions aux limites

Aucune densité de flux de masse évaporée ni champ de vitesse ne peut se développer dans un film adsorbé, à cause de l'influence prépondérante de la pression de disjonction au regard de la capillarité. Cette absence d'évaporation dans un film adsorbé permet de définir le saut de pression à l'interface liquide-vapeur dans ce film, notée  $\Phi_0$  dans la suite. En effet, le terme  $\Gamma^{lg}$  dans l'équation (6.20) devient nul dans ce film, ce qui impose :

$$\Phi_0 = \frac{\beta_c}{B'} \quad (6.23)$$

Puisque la pression de disjonction est l'unique contrainte ayant un effet non-négligeable sur le film adsorbé et que le saut de pression dans cette zone est à présent connu, la hauteur du film adsorbée, notée  $\delta_0$  par la suite, provient simplement de la définition de la pression de disjonction :

$$\delta_0^3 = \frac{\epsilon^2}{\Phi_0} \quad (6.24)$$

### 6.2.3 Changement de variables et étude asymptotique

Pour pouvoir être résolue, l'équation d'interface (6.22) doit d'abord être redimensionnée. La première étape consiste à adimensionner (6.22b) pour la rendre indépendante du paramètre  $\epsilon$ . De nouveaux paramètres d'interface et saut de pression sont donc définis, ainsi qu'un nouveau paramètre de position axiale :

$$h = \epsilon H \quad , \quad x = \epsilon X \quad \text{et} \quad \Phi = \epsilon^{-1} \Phi^* \quad (6.25)$$

Les équations (6.22) deviennent alors :

$$-\frac{1}{3}d_X(H^3 d_X \Phi^*) + d_X H = E_{tr} \beta_c \frac{1 - \Phi^*/(\epsilon \Phi_0)}{\beta_b + Bi_m \epsilon H} \quad (6.26a)$$

$$\Phi^* = d_{X^2} H + \frac{1}{H^3} \quad (6.26b)$$

Ces équations sont associées aux conditions aux limites suivantes :

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} H = \frac{\delta_0}{\epsilon} = (\epsilon \Phi_0)^{-1/3} \quad , \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} \Phi^* = \epsilon \Phi_0 \quad (6.27)$$

La deuxième étape est de travailler avec des conditions aux limites constantes, idéalement égales à un. Un nouveau changement de variables est posé :

$$H = (\epsilon \Phi_0)^{-1/3} \eta \quad , \quad \Phi^* = \epsilon \Phi_0 \Psi \quad \text{et} \quad X = (\epsilon \Phi_0)^{-2/3} \xi \quad (6.28)$$

Le problème associé à la région de transition entre le ménisque arrière et un film adsorbé peut donc s'écrire :

$$-\frac{1}{3} d_\xi (\eta^3 d_\xi \Psi) + (\epsilon \Phi_0)^{-1} d_\xi \eta = \frac{E_{tr} \beta_c (1 - \Psi)}{\beta_b (\epsilon \Phi_0)^{4/3} + B_{im} \epsilon^2 \Phi_0 \eta} \quad (6.29a)$$

$$\Psi = d_{\xi^2} \eta + \frac{1}{\eta^3} \quad (6.29b)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \eta = 1 \quad , \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \Psi = 1 \quad (6.30)$$

L'équation (6.29) est une équation différentielle d'ordre quatre requérant quatre conditions aux limites et non simplement les deux données ici. Il est donc nécessaire d'effectuer une étude asymptotique de (6.29) pour des  $\xi$  grands. Cette étude asymptotique génère des conditions perturbées remplaçant les conditions (6.30), qui rendent possible la résolution de l'équation d'interface, ainsi que l'obtention d'un résultat non-trivial. Cette perturbation est obligatoire, puisqu'un film d'épaisseur constante égale à la hauteur du film adsorbé est une solution du problème (6.29), (6.30).

Les fonctions suivantes sont donc définies :

$$\eta = 1 + \eta' \quad , \quad \Psi = 1 + \Psi' \quad \text{quand} \quad \xi \rightarrow +\infty \quad (6.31)$$

Les fonctions  $\eta'$  et  $\Psi'$  sont très petites devant 1 pour des  $\xi$  grands. Dans cette limite des  $\xi$  grands, les équations (6.29) se simplifient et deviennent :

$$-\frac{1}{3} d_{\xi^2} \Psi' + (\epsilon \Phi_0)^{-1} d_\xi \eta' = -\beta_d \Psi' \quad (6.32a)$$

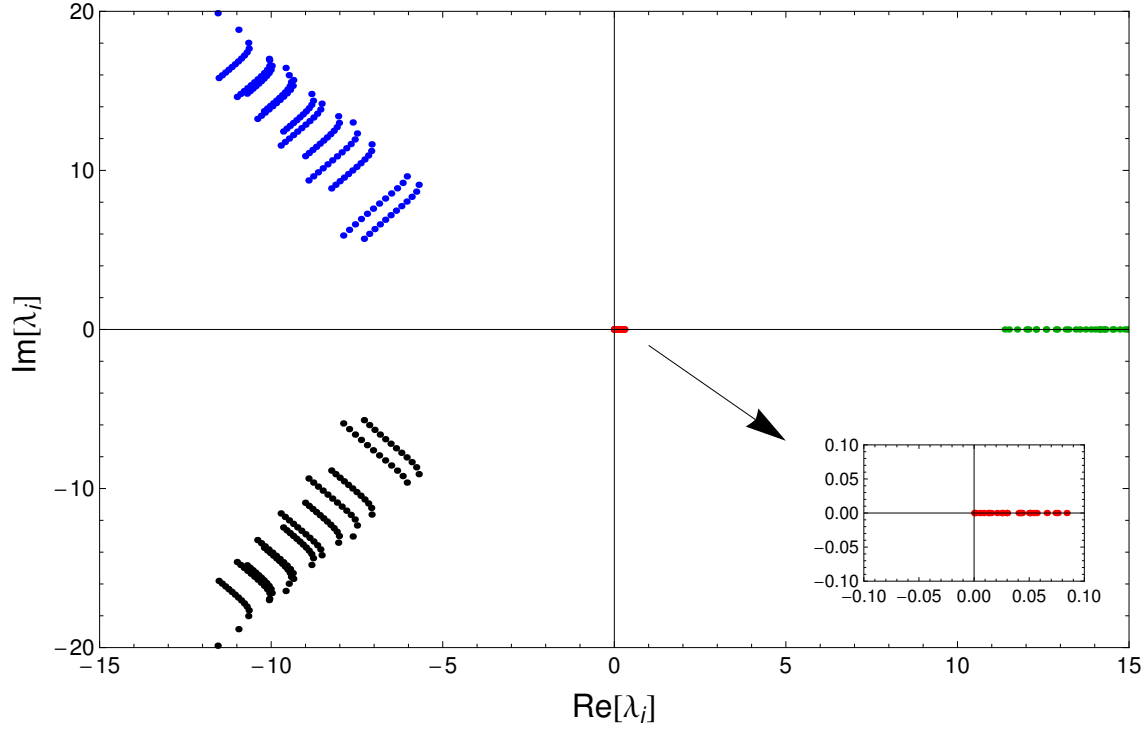


Figure 6.7: Racines de l'équation (6.36) pour de l'eau à différentes densités de flux de chaleur et vitesses du ménisque imposées.

$$\Psi' = d_{\xi^2} \eta' - 3\eta' \quad (6.32b)$$

$$\text{avec} \quad \beta_d = \frac{E_{tr} \beta_c}{\beta_b (\epsilon \Phi_0)^{4/3} + Bi_m \epsilon^2 \Phi_0} \quad (6.33)$$

Il ne reste à présent qu'à résoudre une équation différentielle d'ordre 4 portant sur  $\eta'$  :

$$-\frac{1}{3} d_{\xi^4} \eta' + (\beta_d + 1) d_{\xi^2} \eta' + (\epsilon \Phi_0)^{-1} d_{\xi} \eta' - 3\beta_d \eta' = 0 \quad (6.34)$$

La solution de cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$\eta' = A_1 e^{\lambda_1 \xi} + A_2 e^{\lambda_2 \xi} + A_3 e^{\lambda_3 \xi} + A_4 e^{\lambda_4 \xi} \quad (6.35)$$

où les coefficients  $\lambda_i$ ,  $i$  allant de 1 à 4, sont les racines de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle (6.34), qui a pour expression :

$$-\frac{1}{3} r^4 + (\beta_d + 1) r^2 + (\epsilon \Phi_0)^{-1} r - 3\beta_d = 0 \quad (6.36)$$

La figure 6.7 représente les racines de cette équation caractéristique pour de l'eau et différentes valeurs de vitesse, de densité de flux de chaleur et de température de saturation. Pour chaque jeu de paramètres, deux racines sont réelles et positives, tandis que les deux autres sont complexes conjuguées et à partie réelle négative. Le même calcul effectué pour d'autres fluides présente des racines de même nature, même si leurs valeurs sont différentes, bien entendu. Puisque les fonctions de perturbation  $\eta'$  et  $\Psi'$  ne doivent pas diverger pour des  $\lambda$  grands, les deux coefficients  $A_3$  et  $A_4$  liés aux racines positives de la solution sont pris égaux à zéro. Le paramètre d'interface modifié  $\eta$  peut donc s'écrire de la façon suivante :

$$\eta = 1 + e^{\lambda_{Re} \xi} (A_1 \cos(\lambda_{Im} \xi) + A_2 \sin(\lambda_{Im} \xi))$$

$$\text{où } \lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \lambda_{Re} + \mathbf{i} \lambda_{Im} \quad \text{avec} \quad \lambda_{Re} < 0 \quad (6.37)$$

La présence des fonctions trigonométriques dans l'expression de  $\eta$ , venant de la partie imaginaire non-nulle des racines  $\lambda_i$  dont la partie réelle est négative, indique que le raccordement avec le film adsorbé se fera sous forme d'oscillations, ou d'ondulations de l'interface liquide-vapeur, autour d'une hauteur de film adimensionnée 1, avant que la fonction exponentielle n'atténue ces oscillations.

L'ondulation du film adsorbé au niveau de la ligne triple, c'est-à-dire du raccordement entre le ménisque et ce film, a déjà été rapportée par Benselama *et al.* [8], quoique dans un cas de figure un peu différent que celui présenté ici. En effet, ces derniers envisageaient trois effets physiques importants dans la région de la ligne triple, se concrétisant par trois termes distincts dans l'équation d'interface : un terme modélisant l'effet des forces de capillarité et de viscosité, ayant une forme identique au terme de visco-capillarité présent dans notre équation d'interface ; un terme de transfert de chaleur provenant d'une température imposée à la paroi, ayant une forme très proche du membre de droite de l'équation (6.29a) ; enfin un terme de thermo-capillarité fonction du nombre de Marangoni modélisant la perturbation de l'interface liquide-vapeur suivant les variations de la tension de surface en fonction de la température à l'interface.

La seule différence fondamentale entre le modèle développé ici et celui de Benselama *et al.* [8] est que ce dernier terme thermo-capillaire est remplacé dans notre cas par un terme provenant du déplacement de la ligne triple avec le ménisque le long de la paroi. Benselama définit un nombre de Marangoni critique pour discriminer entre les solutions monotones et ondulées, ce qui semble indiquer que, dans l'équation d'interface (6.34), c'est la présence du terme  $d_\xi \eta$  qui entraîne la perturbation de la ligne triple. Un autre argument en faveur de la responsabilité du déplacement du ménisque dans la perturbation de la ligne triple est le rapport de Wayner *et al.* [85], sur le même sujet d'un ménisque se raccordant à un film adsorbé et soumis à une différence de température entre la paroi et la vapeur, et où ne sont pris en compte que les termes capillaire et thermique, commun à la fois aux travaux de Benselama *et al.* et à ceux présentés ici. Wayner *et al.* n'observent pas quant à eux une ondulation du film adsorbé au niveau de la ligne triple. Une comparaison

de ces trois travaux est présentée dans le tableau suivant :

	Capillarité/viscosité $d_\xi(\eta^3 d_{\xi^3} \eta)$	Thermique $(1 - \Phi)/(1 + \eta)$	Thermo-capillarité	Déplacement $d_\xi \eta$
Wayner [85]	✓	✓	×	×
Benselama[8]	✓	✓	✓	×
Voirand	✓	✓	×	✓

Puisque l'équation caractéristique (6.36) associée à l'équation linéarisée (6.34) ne présente pas de racines réelles négatives sur la plage de paramètres qui nous intéresse, les ondulations du film adsorbé au niveau de la ligne triple sont toujours présentes dans un système où cette ligne triple est en déplacement le long de la paroi. À l'inverse, l'effet des forces thermo-capillaires observées par Benselama *et al.* [8] peuvent quant à elles engendrer des solutions stables (racines  $\lambda_i$  réelles négatives) pour certaines valeurs du nombre de Marangoni.

Les ondulations de l'interface liquide-vapeur au niveau de la ligne triple, en entraînant des variations de la pente et de la courbure de cette interface, vont générer des recirculations du liquide, comme ce qui peut être observé dans le cadre de l'effet Marangoni, où les variations de température le long de l'interface entraînent une variation de la tension de surface à l'interface liquide-vapeur, des variations de la courbure, des variations de pression le long de l'interface, et donc des recirculations. Attention cependant à ne pas confondre cet effet thermo-capillaire avec les recirculations rencontrées ici. En effet le rapport de Wayner *et al.* [85] et le présent calcul indiquent bien que le responsable des ondulations de l'interface liquide-vapeur n'est pas la différence de température entre la paroi solide et cette interface, mais bien le déplacement de la ligne triple le long de la paroi.

#### 6.2.4 Résolution de l'équation d'interface

Grâce à l'équation (6.37) et la définition asymptotique du saut de pression  $\Psi'$  par l'équation (6.32b), l'équation (6.29) possède quatre conditions aux limites générant une solution non triviale de cette équation. Ces conditions aux limites sont les expressions asymptotiques de  $\eta$  et  $\Psi$ , ainsi que leurs dérivées par rapport au paramètre  $\xi$ .

Cette équation (6.29) est d'ailleurs invariante par translation du paramètre  $\xi$ , ce qui permet de fixer arbitrairement l'abscisse de démarrage de la résolution, qui sera prise à des  $\xi$  positifs et assez grands pour que les fonctions  $\eta'$  et  $\Psi'$  soient assez faibles. De cette fixation arbitraire de l'abscisse initiale découle la possibilité de la définition arbitraire d'une des constantes d'intégration entrant dans la définition de  $\eta$ , par exemple  $A_1 = 1$ . En revanche, un critère de résolution doit être défini pour pouvoir déterminer la dernière constante d'intégration  $A_2$ . Wayner *et al.* [85] ont déterminé cette dernière constante en ajustant la solution obtenue à des profils mesurés expérimentalement. Ce critère permet de généraliser une campagne d'essai, mais reste une approche locale de

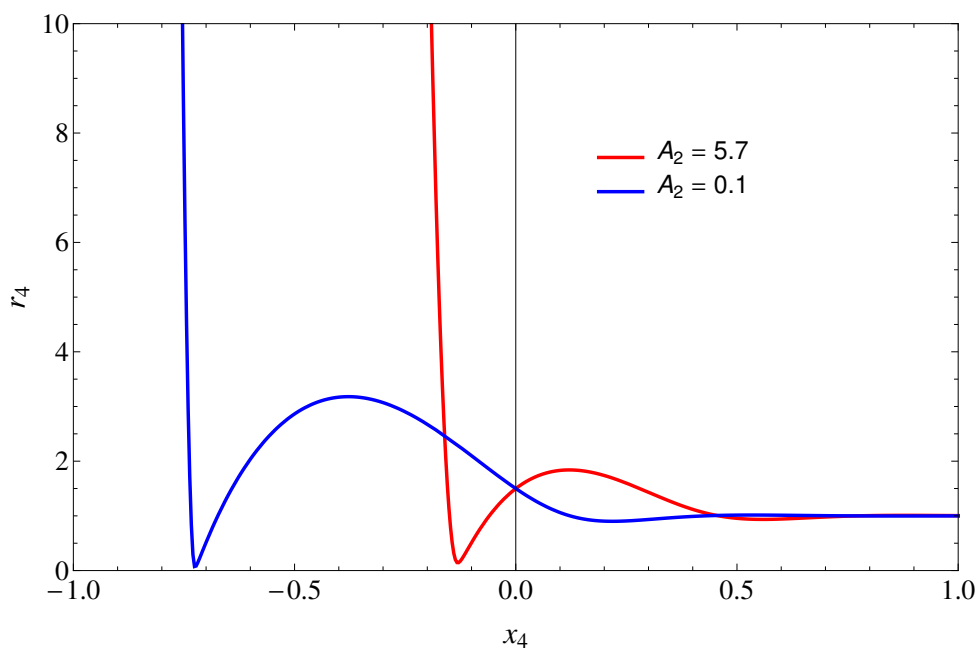


Figure 6.8: Deux profils d'interface de la région de transition arrière se raccordant à un film adsorbé.  $\varphi_{in} = 5 \text{ kW.m}^{-2}$ ,  $U_m = 2 \text{ cm.s}^{-1}$ .

la résolution. Benselama *et al.* [8] ont, quant à eux, imposé la hauteur à une abscisse donnée, typiquement  $\eta(0) = 1.5$ , ce qui permet une définition plus générale, puisque le problème est invariant par translation axiale, rappelons-le.

Cependant, la figure 6.8 montre que le couple de paramètre  $(\varphi_{in}, U_m)$  peut générer un bourrelet de liquide de taille assez importante à la jonction avec le film adsorbé, ce qui entraîne une influence importante du coefficient  $A_2$  sur le profil d'interface de la zone de transition entre le film et le ménisque. Ainsi, pour le couple de paramètre  $(\varphi_{in}, U_m)$ , deux solutions remplissant la condition  $\eta(0) = 1.5$  peuvent être trouvées. L'obtention d'une solution à l'équation d'interface dans ces conditions semble donc reposer, quoiqu'il arrive, sur des conditions arbitraires.

## 6.3 Conclusion

Ce chapitre est séparé en deux grandes parties.

D'une part, les calculs portant sur un ménisque remouillant un film de liquide micrométrique laissent à penser que le modèle utilisé n'est pas adapté pour décrire ces conditions particulières d'un ménisque anisotherme reculant sur un film de cette épaisseur. En effet, les solutions de l'équation d'interface dans la région de transition entre le film et le ménisque montrent, pour certains jeux de paramètres, des bourrelets de liquide de taille très importante. Dans ces bourrelets, la capillarité devrait prendre le pas sur la viscosité.



Or, le modèle de transition n'est pas adapté pour représenter cette physique. De plus, pour certaines valeurs discrètes du nombre d'évaporation modifié  $E_f$ , une discontinuité de la taille de ces bourrelets peut être observée, ce qui reste encore physiquement inexpliqué.

D'autre part, le modèle d'un ménisque remouillant un film adsorbé, laissé par l'évaporation complète du film de liquide, présente une ondulation de l'interface liquide-vapeur au niveau de la ligne triple. En s'appuyant sur les résultats publiés par Wayner *et al.* [85] et Benselama *et al.* [8], il est possible de montrer que ces ondulations sont dues, non pas au transfert de chaleur dans le film, mais plutôt au déplacement de la ligne triple sur la paroi du tube capillaire.

# Chapitre 7

## Modélisation de la phase vapeur - Régime transitoire

L'objectif de ce chapitre est d'établir un modèle thermodynamique de la vapeur constituant la bulle, et d'utiliser les résultats des chapitres précédents pour modéliser le comportement global d'une bulle sous un chargement thermique. Le traitement et la résolution de ce modèle reste pour l'instant parcellaire. Seule le cas de ménisques reculants sera traité dans ce chapitre. Mais l'objectif est aussi de montrer qu'à partir de ces premiers résultats, il est envisageable de construire un modèle thermodynamique transitoire complet d'un réseau de bulles, chauffées ou non, et par là d'obtenir de précieuses informations sur le fonctionnement d'un caloduc oscillant.

Nous allons tout d'abord établir le modèle thermodynamique de la phase vapeur. Ensuite, il sera effectué un changement de repère dans les modèles associés aux régions du film de liquide et de la transition, en y ajoutant un terme transitoire. Ce changement de repère permet de modéliser un film qui s'évapore dans le temps. Dans la région de transition entre le ménisque et le film, il sera montré que le terme transitoire est négligeable à l'ordre principal de perturbation, ce qui permet d'utiliser les résultats obtenus précédemment sur la hauteur de film déposé par le ménisque.

### 7.1 Thermodynamique de la phase vapeur

La bulle de vapeur considérée ici est un système fermé qui voit sa masse augmenter indéfiniment à cause de l'évaporation à l'interface liquide-vapeur. Cet apport de masse à la phase vapeur est effectué à température de saturation. Il a un effet sur la forme de l'interface, et donc sur la dynamique de la phase liquide. L'augmentation de masse de la bulle de vapeur peut se traduire par une augmentation de volume et/ou de pression. L'augmentation de volume se traduit par une augmentation de la longueur du film

$L_f$ , les autres dimensions du système n'ayant pas une capacité de variation importante. L'augmentation de pression entraîne, quant à elle, une augmentation de la température de saturation de la phase vapeur, ce qui influence le flux de masse évaporée. Finalement, nous allons constater que la température de la vapeur n'évolue pas avec la même dynamique que la température de saturation.

La bulle est considérée à pression uniforme. Cette hypothèse implique que la forme de l'interface de notre système ne sera dépendante que d'un seul paramètre côté vapeur, à savoir sa température d'équilibre. (cf. relation constitutive de l'annexe A).

Sans assèchement de la paroi du capillaire, les ménisques avant et arrière ne sont finalement couplés qu'à travers la phase vapeur, puisque celle-ci induit une variation de la longueur de film. Cette variation de longueur conduit non seulement à une variation des conditions aux limites pour la résolution du problème lié aux ménisques, mais modifie aussi leurs vitesses respectives.

La variation temporelle de masse de la phase vapeur est directement liée au flux de masse évaporée :

$$d_t m_v = \int_{int} G^{lg} dS \quad (7.1)$$

La masse et le volume de la bulle sont naturellement reliés par :

$$m_v = \rho_v V_v \quad (7.2)$$

Le premier principe de la thermodynamique fournit un bilan d'énergie pour la phase vapeur. La variation d'énergie interne du système vapeur est égale à l'énergie apportée par l'augmentation de masse, à laquelle il faut rajouter le travail des forces de pression. Si la paroi du capillaire s'assèche, il faut aussi ajouter à ce bilan d'énergie l'apport direct de chaleur de la paroi à la phase vapeur, noté  $d_t Q$ .

$$c_{v,v} d_t(m_v T_v) = c_{p,v} T_v d_t m_v - p_v d_t V_v + d_t Q \quad (7.3)$$

La phase vapeur est considérée compressible, sa masse volumique étant liée à sa température et à sa pression par la loi des gaz parfaits :

$$p_v = \rho_v R_s T_v \quad (7.4)$$

$R_s$  est la constante spécifique du fluide considéré, s'exprimant comme le rapport entre la constante des gaz parfaits,  $R_g$ , et la masse molaire de ce fluide. Cette constante spécifique peut être reliée aux capacités thermiques massiques  $c_{p,v}$  et  $c_{v,v}$  par la relation de Mayer :

$R_s = c_{p,v} - c_{v,v}$ . Ainsi, le bilan d'énergie (7.3) peut être réécrit pour exprimer les variations de température dans la phase vapeur :

$$d_t T_v = \frac{R_s T_v}{c_{v,v}} \left( \frac{d_t m_v}{m_v} - \frac{d_t V_v}{V_v} + \frac{d_t Q}{p_v V_v} \right) \quad (7.5)$$

La variation temporelle de masse peut être définie à partir de la relation (7.2) :

$$d_t m_v = \rho_v d_t V_v + V_v d_t \rho_v + V_v d_p \rho_v d_t p_v \quad (7.6)$$

En isolant la variation de pression dans cette expression, et en remplaçant le terme  $d_t T_v$  par l'équation (7.5), la relation décrivant la variation de pression s'écrit :

$$d_t p_v = \gamma_s p_v \left( \frac{d_t m_v}{m_v} - \frac{d_t V_v}{V_v} \right) + \frac{R_s}{c_{v,v}} \frac{d_t Q}{V_v} \quad (7.7)$$

La constante  $\gamma_s$  est le rapport des capacités thermiques massiques  $c_{p,v}/c_{v,v}$ .

Remarquons dès à présent la relation entre les variations de température et de pression dans la phase vapeur, accessible à partir des équations (7.5) et (7.7) :

$$\rho_v c_{p,v} d_t T_v = d_t p_v + \frac{d_t Q}{V_v} \quad (7.8)$$

Les équations (7.5) et (7.7) permettent ainsi de connaître les variations de température et de pression dans la bulle à partir des variations de masse, de volume et éventuellement l'apport de chaleur, si la paroi s'assèche en partie. Si la forme de la bulle est connue, alors la variation de masse peut facilement être exprimée par (7.1). Pour ce qui est des variations de volume, l'impédance que l'inertie et la viscosité des bouchons de liquide opposent au mouvement des ménisques doit être quantifiée. En effet, c'est cette impédance qui empêche le volume de la bulle de s'adapter parfaitement et instantanément à la variation de sa masse. Si la paroi est totalement mouillée, c'est-à-dire si aucun flux de chaleur n'est apporté directement à la phase vapeur, cette impédance est ainsi entièrement responsable de l'augmentation de pression et de température de la bulle.

Il y a maintenant une centaine d'années, Lucas [48] et Washburn [84] ont appliqué le bilan de quantité de mouvement à un bouchon de liquide contenu dans un capillaire et soumis à une différence de pression entre l'amont et l'aval du bouchon. Dans notre cas, les bouchons de liquide sont soumis à une différence entre la pression vapeur  $p_v$  et une pression quelconque loin de la bulle étudiée, notée  $p_\infty$ . Suivant les cas envisagés, cette pression à l'infini pourra être différente pour les bouchons avant et arrière. Cette pression  $p_\infty$  peut aussi être comprise comme la pression régnant dans une bulle adjacente, mais

ce cas de figure ne sera pas abordé ici. Le bilan intégral de quantité de mouvement selon Lucas et Washburn est donné par Bosanquet [10], et peut s'écrire, avec les notations de ce mémoire, pour un bouchon de liquide de longueur  $L$ , de masse  $m_l$  et de vitesse  $v_l$  :

$$m_l d_t v_l + 8 \pi \mu L v_l = (p_v - p_\infty) \pi R^2 \quad (7.9)$$

En considérant le liquide incompressible, il est possible d'écrire la vitesse  $v_l$  du bouchon de liquide comme la variation dans le temps de la position du ménisque associé (le flux de masse évaporée au niveau de ce dernier est supposé faible). Le bilan de quantité de mouvement (7.9) peut s'écrire :

$$m_l d_{t^2} L_b + 8 \pi \mu L d_t L_b = (p_v - p_\infty) \pi R^2 \quad (7.10)$$

La longueur  $L_b$  représente ici la position du ménisque présent entre le bouchon de liquide et la bulle de vapeur dans un repère absolu lié à la paroi solide du capillaire dans lequel se déplace la bulle.

## 7.2 Apport de chaleur à la phase vapeur

Si le film de liquide repose suffisamment longtemps sur la paroi du capillaire, cette dernière peut s'assécher, et être ainsi en contact avec la phase vapeur. La quantité de chaleur apportée de la paroi à la bulle doit alors être prise en compte dans le bilan d'énergie de la phase vapeur. Nous considérons que cette quantité de chaleur est transférée de la paroi à la vapeur par convection. La température de la paroi asséchée varie axialement, parce qu'elle s'assèche au fur et à mesure. Il est impératif de vérifier *a posteriori* que le flux de chaleur axial dans la paroi solide est négligeable devant le flux radial. Enfin, la température de la vapeur est supposée uniforme à un instant  $t$ , et la dynamique du transfert de chaleur entre la paroi et la bulle est plus rapide que la variation de la température globale de la bulle. Dans ces conditions, il est possible d'écrire la relation suivante :

$$d_t Q = 2 \pi R H_v \int_0^{L_a} (T_w(x) - T_v) dx, \quad (7.11)$$

Le coefficient de transfert entre la paroi et la vapeur est noté  $H_v$ . Ce coefficient est difficile à déterminer en pratique, d'autant qu'il est supposé que la vitesse de la phase vapeur est assez faible pour être négligeable. Il peut-être évalué en première approche de l'ordre de  $1 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ , ou de l'ordre du coefficient de transfert radiatif. La longueur  $L_a$  représente la longueur axiale de la paroi asséchée en contact direct avec la vapeur. La paroi du capillaire est en cuivre (ou en tout autre matériau réputé bon conducteur), et toutes les grandeurs physiques associées à ce matériau sont indicées  $c$ . Il reste à déterminer

la température de la paroi solide en fonction du temps. Le nombre de Biot est petit (de l'ordre de  $10^{-5}$ ), c'est-à-dire que la conductance thermique du cuivre est supposée grande devant la conductance thermique de la vapeur dans le capillaire, ou celle de l'air ambiant extérieur, ce qui permet de négliger l'effet du transfert par conduction à travers l'épaisseur de la paroi du capillaire. Le bilan d'énergie appliqué à la paroi s'écrit donc simplement :

$$\varphi_{in} = \rho_c c_p d d_t T_w + H_{ext} (T_w - T_{ext}) + H_v (T_w - T_v) \quad (7.12)$$

La grandeur  $c_p$  représente la capacité thermique massique du matériau constituant la paroi solide du capillaire, et  $d$  est son épaisseur. Nous considérons qu'au moment où la paroi s'assèche, elle se trouve à la température de la vapeur, l'épaisseur de liquide étant très faible juste avant cet assèchement.

$$T_w(t_{dry}) = T_v \quad (7.13)$$

## 7.3 Modification du modèle de la phase liquide

Le modèle de comportement de la vapeur est lié au modèle liquide, déjà étudié dans les chapitres précédents, par la position de l'interface liquide vapeur à un temps  $t$  donné en fonction de la pression régnant dans la phase vapeur et des vitesses des ménisques délimitant la bulle. Si jusqu'à présent le repère associé aux deux modèles du film et de la transition se déplaçaient avec le ménisque, ils vont maintenant être définis dans le référentiel du laboratoire (repère  $(x_0, r_0)$  dans la figure 7.1) pour des raisons de commodité. Le bilan de masse dans la phase liquide donné par les équations (2.33a) et (2.33b) doit

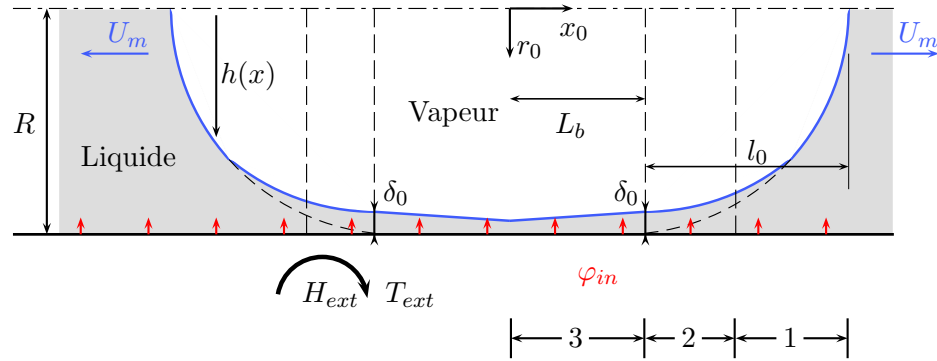


Figure 7.1: Problème d'une bulle en expansion. Les régions de 1 à 3 sont le ménisque, la transition et le film de liquide déposé, respectivement.

donc être modifié et s'écrit comme suit:

$$d_t h + d_x \left( \int_{h(x)}^R U r dr \right) = E h(x) \Gamma^{lg} \quad (7.14)$$

Pour établir cette dernière équation dans les repères liés aux régions de transition (indignée 2) et du film de liquide (indignée 3), les changement de repères suivant ont été effectués :

$$\left. \begin{aligned} r_2 &= (1 - r_0) Ca^{-2/3} \quad ; \quad x_2 = (x_0 + L_b - l_0) Ca^{-1/3} \\ r_3 &= (1 - r_0) Ca^{-2/3} \quad ; \quad x_3 = x_0 \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

Les grandeurs  $r_0$ ,  $x_0$ ,  $l_0$  et  $L_b$  sont celles définies en figure 7.1. Le repère lié à la région de transition n'est pas différent de celui de la définition (7.15), si la variation de la vitesse du ménisque est supposée suffisamment faible pour pouvoir négliger l'accélération d'entraînement liée au déplacement du repère. La vitesse instantanée du ménisque ( $U_m = d_t L_b$ ) est toujours utilisée pour adimensionner le problème lié à la région de transition, et le temps caractéristique est défini par  $R/U_m$ .

Les expressions de la vitesse axiale dans la phase liquide dans les régions de transition et du film à l'ordre principal, le seul envisagé dans ce chapitre (les exposants [00] sont omis pour plus de clarté), s'écrivent :

$$U_2 = -d_{x^3} h_2 \left( \frac{r_2^2}{2} - h_2 r_2 \right) - 1 \quad (7.16)$$

$$U_3 = 0 \quad (7.17)$$

Le bilan (7.14), écrit dans chaque région de résolution à l'ordre principal, mène donc aux équations d'interface suivantes :

$$-\frac{1}{3} d_x (h_2^3 d_{x^3} h_2) + d_x h_2 = E_{tr} \Gamma_2^{lg} \quad (7.18)$$

$$-d_t h_3 = E_f \Gamma_3^{lg} \quad (7.19)$$

Le problème thermique n'est pas différent de celui résolu dans la section 4.2, la densité de flux de masse évaporée adimensionnée s'écrit donc :

$$\Gamma_i^{lg} = \frac{\beta_a}{\beta_b + Bi_m h_i} \quad (7.20)$$

avec  $i = 2$  dans la région de transition, et  $i = 3$  dans la région du film. Les paramètres  $\beta_a$  et  $\beta_b$  sont les mêmes que dans la définition (4.9).

Les équations d'interface (7.18) et (7.19) ne sont en elles-même pas différentes des équations d'interface (4.25) et (4.13). Elles ont simplement été reformulées dans un nouveau repère pour prendre en compte l'évaporation au cours du temps, et à une abscisse précise, du film de liquide déposé. Ce film de liquide est donc supposé immobile, et la variation de sa hauteur à une abscisse donnée n'est due qu'à son évaporation.

L'équation (7.19) est soumise à la condition initiale  $h_3(t = t_0) = \delta_0$ . Le temps  $t_0$  initial, auquel est déposé une épaisseur de liquide  $\delta_0$ , est fonction de l'abscisse considérée. L'interface liquide-vapeur dans la région du film de liquide peut donc être paramétrée comme suit :

$$h_3(x, t) = \frac{1}{Bi_m} \left( -\beta_b + \sqrt{(\beta_b + Bi_m \delta_0(x))^2 - 2Bi_m E_f \beta_a (t - t_0(x))} \right) \quad (7.21)$$

Le temps  $t_0$ , écrit de manière dimensionnelle, peut être évalué au premier ordre par la grandeur  $x/U_m$ . Les conditions aux limites imposées pour la résolution de l'équation d'interface (7.18) sont donc identiques à celles définies par les équations (4.26). Il est alors possible d'utiliser les résultats de la section 4.5, en particulier la corrélation (4.44) décrivant la hauteur du film de liquide déposé par le recul du ménisque à un instant précis.

## 7.4 Méthode de résolution

### 7.4.1 Expressions intégrales

La difficulté principale dans la résolution de ce problème provient de l'expression de la paramétrisation (7.21) de l'interface dans la région du film de liquide. En effet, à un temps  $t$ , la forme de l'interface dans cette région est fonction de tous les temps précédents, puisque les conditions initiales  $t_0$  et  $\delta_0$  se définissent théoriquement comme suit :

$$t_0(x) = \int_{L_0}^x \frac{dx'}{d_t L_b(x')} \quad (7.22)$$



$$\delta_0(x) = 1.337 \left( \frac{\mu d_t L_b(x)}{\sigma} \right)^{2/3} - 0.6 \left( \frac{\varphi_{in}}{\rho h_{lg} d_t L_b(x)} \right)^{4/3} \quad (7.23)$$

Ici la longueur  $L_0$  représente la longueur initiale de la bulle. Pour définir le volume de la bulle de vapeur, la contribution de la région de transition n'est pas considérée, car le volume de la phase vapeur en vis-à-vis est très faible devant celui du ménisque et du film. Le volume de vapeur a donc pour expression :

$$V_v = V_m + \pi \int_0^{L_b} h_3^2(x, t) dx \quad (7.24)$$

La fonction  $V_m$  représente le volume des deux ménisques.

Enfin, pour ne rien arranger, puisque la pression dans la phase vapeur est elle aussi fonction du temps, l'équation (7.10) admet comme solution, en vitesse du ménisque :

$$d_t L_b = \frac{e^{-t/\tau}}{\pi \rho L} \int_0^t (p_v(t') - p_\infty) e^{t'/\tau} dt' ; \quad \tau = \frac{m_l}{8\pi \mu L} \quad (7.25)$$

Toutes ces expressions intégrales ne permettent pas une résolution analytique aisée du problème vapeur, quand bien même elle serait effectivement réalisable. Il est donc préférable de discrétiser le modèle, pour accéder aux solutions qui nous intéressent.

### 7.4.2 Discrétisation

Dans cette discrétisation, la plupart des paramètres du modèle (température, pression, volume, masse, ...) sont uniquement fonction du temps. Seul le paramètre d'interface  $h$  est fonction à la fois de la position axiale et du temps. Mais cette dépendance axiale de  $h$  est elle-même fonction du temps. En effet, la position et la vitesse à un instant  $t$  d'un ménisque reculant détermine la hauteur de film qui est déposée à la paroi à cette position. Ensuite, cette hauteur de liquide, à cette position donnée, n'est plus fonction que du temps, puisqu'il s'agit de la vaporisation d'un film immobile à l'ordre principal. La difficulté ici est la mise en place d'une discrétisation axiale du film, dont la longueur varie dans le temps.

Une seule discrétisation temporelle est donc imposée. Pendant ce pas de temps  $\Delta t$ , le ménisque se déplace d'une longueur  $L_{bi+1} - L_{bi}$ , distance à laquelle est déposé un film dont la hauteur est fonction de la vitesse instantanée du ménisque, évaluée comme  $(L_{bi+1} - L_{bi})/\Delta t$ . La discrétisation spatiale découle donc de la discrétisation temporelle. Plus le ménisque se déplace rapidement, plus la discrétisation spatiale sera espacée, et inversement. Dans les calculs présentés dans la suite de cette section, l'indice  $i$  désigne la

discrétisation temporelle, le deuxième indice  $j$  dans l'expression de la hauteur de liquide  $h$  représente la discrétisation spatiale.

On se place au temps  $i$ . Les indices  $v$  signifiant des grandeurs relatives à la phase vapeur sont omis pour plus de clarté, ainsi que l'indice  $b$  dans l'expression de la longueur de la bulle. Une discrétisation explicite pour les dérivées premières, et centrée pour les dérivées secondes, est choisie. L'expression du volume de la bulle provient de la discrétisation de l'équation (7.24) :

$$V_i = V_{mi} + \sum_{j=0}^i \pi R^2 (1 - h_{ij})^2 (L_j - L_{j-1}) \quad (7.26)$$

Le terme  $V_{mi}$  représente le volume des deux ménisques de chaque côté de la bulle. Il a été montré dans la section 4.1 que le ménisque avant, à l'ordre principal, occupe le volume d'une demi-sphère. Le volume du ménisque arrière est moindre, et fonction la vitesse. De plus, la hauteur  $h_{ij}$  est définie à partir de l'expression (7.21) :

$$h_{ij} = \frac{R}{Bi} \left( -\beta_b + \sqrt{(\beta_b + Bi \delta_{0j})^2 - 2Bi E \beta_a (i - j) \Delta t} \right) \quad (7.27)$$

En pratique cette dernière expression n'est pas adaptée, car le paramètre  $\beta_a$ , en particulier, est fonction de la température de saturation associée à la pression instantannée de la phase vapeur dans la bulle, qui évolue avec le temps. Si la pression de vapeur augmente au cours du temps comme il est supposé, la densité de flux de masse évaporée devrait chuter, et avec elle la vitesse de variation de la hauteur de liquide dans le film.  $h_{ij}$  ne peut donc pas être évaluée au temps  $i$  à partir de l'instant où il a été déposé, mais uniquement à partir du temps immédiatement précédent, comme suit :

$$h_{ij} = \frac{R}{Bi} \left( -\beta_b + \sqrt{(\beta_b + Bi h_{i-1j})^2 - 2Bi E \beta_a \Delta t} \right) \quad (7.28)$$

Le cas particulier  $j = i$  désigne la position où le film vient d'être déposé à l'instant  $i$ . La hauteur  $h_{ii}$  est donc définie en utilisant la corrélation (7.23) discrétisée :

$$h_{ii} = 1.337 \left( \frac{\mu (L_i - L_{i-1})}{\sigma \Delta t} \right)^{2/3} - 0.6 \left( \frac{\varphi_{in} \Delta t}{\rho h_{lg} (L_i - L_{i-1})} \right)^{4/3} \quad (7.29)$$

Pour des raisons de simplification, deux nouveaux paramètres,  $\delta_a$  et  $\delta_b$ , sont définis :

$$h_{ii} = \delta_a (L_i - L_{i-1})^{2/3} - \delta_b (L_i - L_{i-1})^{-4/3} \quad (7.30)$$

Pour passer à la date suivante, il faut d'abord évaluer la masse de la bulle au temps  $i + 1$  grâce à la discrétisation de l'équation (7.1) :

$$\frac{m_{i+1} - m_i}{\Delta t} = \frac{\varphi_{in}}{h_{lg}} \sum_{j=0}^i \frac{\beta_a}{\beta_b + Bi h_{ij}} 2\pi(R - R h_{ij})(L_j - L_{j-1}) \quad (7.31)$$

Avant et après assèchement de la paroi, la même discrétisation spatiale est considérée. Chaque point de la paroi asséchée aura donc un temps d'assèchement  $t_{dry}$  différent de ses voisins, et donc une température différente. La discrétisation de l'équation (7.11) donne :

$$\frac{Q_{i+1} - Q_i}{\Delta t} = 2\pi H_v \sum_{j=1}^n R(L_{j+1} - L_j) (T_{wij} - T_i) \quad (7.32)$$

La limite  $n$  représente le nombre de points asséchés à une date  $i$ . Ce nombre n'est pas difficile à déterminer, puisque il suffit de compter les points pour lesquels  $h_{ij} = 0$ . Le temps auquel un point de la paroi s'assèche est noté  $t_j$ . L'expression discrète de la température de la paroi est déterminée grâce à l'équation (7.33) :

$$\frac{T_{wij} - T_{wi-1j}}{\Delta t} = \frac{\varphi_{in}}{\rho_c c_p d} - \frac{H_{ext}}{\rho_c c_p d} (T_{wi-1j} - T_{ext}) - \frac{H_v}{\rho_c c_p d} (T_{wi-1j} - T_{i-1}) \quad (7.33)$$

Comme pour la hauteur de film, cette température de paroi ne pourra être évaluée qu'à partir de la valeur de la température de vapeur au pas de temps précédent,  $T_{i-1}$ .

La discrétisation des équations (7.9), (7.5) et (7.7) donne :

$$p_i = p_\infty + \rho L \frac{L_{i-1} - 2L_i + L_{i+1}}{\Delta t^2} + \frac{8\pi \mu L}{R^2} \frac{L_{i+1} + L_i}{\Delta t} \quad (7.34)$$

$$(T_{i+1} - T_i) = \frac{R_s T_i}{c_{v,v}} \left( \frac{(m_{i+1} - m_i)}{m_i} - \frac{(V_{i+1} - V_i)}{V_i} + \frac{(Q_{i+1} - Q_i)}{p_i V_i} \right) \quad (7.35)$$

$$(p_{i+1} - p_i) = \gamma_s p_i \left( \frac{(m_{i+1} - m_i)}{m_i} - \frac{(V_{i+1} - V_i)}{V_i} \right) + \frac{R_s}{c_{v,v}} \frac{(Q_{i+1} - Q_i)}{V_i} \quad (7.36)$$

La condition initiale portant sur la pression,  $p_0$ , appliquée à l'équation (7.34), permet d'exprimer les longueurs  $L_{-1}$  et  $L_1$  en fonction de la longueur initiale  $L_0$ , qui est un paramètre du problème à résoudre.

Le volume de la bulle à la date suivante peut quant à lui être exprimé en fonction de la longueur  $L_{i+1}$  :

$$V_{i+1} = V_{m i+1} + \pi R^2 (1 - \delta_a (L_{i+1} - L_i)^{2/3} + \delta_b (L_{i+1} - L_i)^{-4/3})^2 (L_{i+1} - L_i) + \sum_{j=0}^i \pi R^2 (1 - h_{i+1 j})^2 (L_j - L_{j-1}) \quad (7.37)$$

### 7.4.3 Déroulement du calcul

Ici est évoqué le calcul des différentes grandeurs constituant le modèle de la bulle à chaque instant ou pas de temps. Ce calcul est détaillé pour les deux premiers pas de temps, et peut s'étendre ensuite par récurrence à n'importe quel temps  $i$ .

La forme de la bulle à l'instant initial est imposée, c'est-à-dire que le volume  $V_0$  est connu, et grâce à la relation entre  $L_0$  et  $L_1$  évoquée plus haut, le volume  $V_1$  est lui aussi connu.

Si une partie de la paroi est initialement asséchée, sa température doit être définie comme une condition initiale. Après cette initialisation, la quantité  $(Q_{i+1} - Q_i)$  peut être déterminée en connaissant simplement la valeur de  $T_i$  et les caractéristiques géométriques de la bulle à l'instant  $i$ .

Nous connaissons donc les variations  $(m_1 - m_0)$ ,  $(V_1 - V_0)$  et  $(Q_1 - Q_0)$ , ce qui nous permet de déterminer les variations  $(T_1 - T_0)$  et  $(p_1 - p_0)$  grâce aux équations (7.35) et (7.36), respectivement. Cette pression  $p_1$ , introduite dans l'expression (7.34), permet alors la mise à jour de la longueur  $L_2$ , et de là les valeurs de  $h_{2j}$ , pour toutes les abscisses où un film a été déposé. Grâce à cette forme du film de liquide connue au temps  $i = 2$ , on peut calculer  $m_2$ ,  $V_2$ ,  $Q_2$ , et donc, grâce encore à (7.35) et (7.36), les expressions de  $T_2$  et  $p_2$ . Ainsi de suite, la relation de récurrence est donc établie.

Pour finir de bien poser le problème, des conditions initiales consistantes doivent être définies, n'ajoutant aucune difficulté notable à la procédure de résolution ci-dessus. Ces conditions initiales peuvent bien sûr être variées pour étudier différents cas de figure.

## 7.5 Expansion d'une bulle

Dans cette section, la bulle de vapeur est supposée initialement au repos. Le référentiel de base  $(x_0, r_0)$  est placé au centre de la bulle, et une densité de flux de chaleur  $\varphi_{in}$  est imposée au mur à  $t = 0$ . Sous l'effet de la masse de vapeur supplémentaire apportée par l'évaporation du film de liquide entre la paroi solide et la bulle, celle-ci augmente alors de volume, ce qui se traduit par le déplacement des deux ménisques délimitant la bulle (cf. figure 7.1). Il est supposé que les deux bouchons de liquide de chaque côté de la bulle sont soumis aux mêmes conditions, c'est-à-dire qu'ils sont de même longueur, et que la pression  $p_\infty$  à l'extrémité des bouchons de liquide est identique. Il est ainsi possible de supposer que la bulle est symétrique par rapport au plan  $x_0 = 0$ , et que les deux ménisques reculent à la même vitesse en déposant un film de liquide qui possède alors la même épaisseur de chaque côté.

Puisque la bulle est initialement au repos, la pression de la vapeur dans la bulle est considérée égale à la pression du liquide loin de la bulle. La température à l'intérieur de la bulle est définie grâce à la pression initiale dans la phase vapeur, qui est une donnée du problème.

$$p_0 = p_\infty \quad \text{et} \quad T_0 = T_{sat}(p_0) \quad (7.38)$$

Cette condition impose la relation suivante, à travers l'équation (7.34) :

$$L_{-1} = L_0 = L_1 \quad (7.39)$$

Pendant le premier pas de temps, la longueur de la bulle ne varie pas, seule une masse de vapeur  $(m_1 - m_0)$  est apportée au système. La seule variation de volume est due à l'évaporation du film déjà présent entre la vapeur et la paroi solide, qui justement engendre l'augmentation de la masse évoquée.

Les autres paramètres d'entrée du système sont la demi-longueur initiale du film de liquide  $L_0$  (demi car la bulle est supposée symétrique), la hauteur initiale de ce film, notée  $h_{00}$ , qui n'aura que peu d'influence sur la dynamique de la bulle car son impact sur la densité de flux de masse évaporée reste faible, ainsi bien sûr que la densité de flux de chaleur apportée à la paroi,  $\varphi_{in}$ . Grâce à ces paramètres initiaux, il est possible de déterminer les grandeurs initiales, volume et masse  $V_0$  et  $m_0$ , et d'amorcer la procédure de résolution présentée dans la section précédente.

Trois fluides sont considérés pour ce calcul, à savoir l'eau, l'éthanol et le n-pentane. L'eau possède une chaleur latente de vaporisation élevée, ce qui veut dire que le film de liquide s'évapore relativement lentement par rapport à d'autres fluides comme par exemple le n-pentane dont la chaleur latente de vaporisation est près de dix fois inférieure à celle de l'eau. D'autre part, le rapport des masses volumiques liquide et vapeur de l'eau est

élevé, d'autant plus que la température de référence est faible (typiquement  $\rho/\rho_v \approx 8.10^3$  à 330K), ce qui signifie que le volume de vapeur créé par l'évaporation d'un film d'eau est très important, et va donc générer une dynamique d'expansion très rapide pour une bulle d'eau.

Les deux paramètres qui ont une influence importante sur la dynamique de la bulle et ses variations de température sont la pression initiale de la phase vapeur, et la densité de flux de chaleur imposée à la paroi. L'influence de ces deux paramètres est analysée dans la suite de ce chapitre.

### 7.5.1 Dynamique de la bulle

Le niveau de pression dans la bulle de vapeur est lié à la vitesse des ménisques par le bilan de quantité de mouvement (7.10) effectué sur les bouchons de liquide. La température moyenne de ce bouchon de liquide est définie comme la température initiale du système.

Une pression initiale plus grande dans le système implique une température initiale plus grande. La viscosité dynamique des bouchons de liquide est donc plus faible pour des pressions initiales élevées, quel que soit le fluide considéré. De plus, le paramètre  $\beta_a$  contrôlant la densité de flux évaporée est lui aussi fonction de la température de saturation régnant dans le système. Une température de saturation faible entraîne un coefficient  $\beta_a$  plus grand ( $\beta_a = 1 - Bi_m T_{sat}$ ), et donc une densité de flux de masse évaporée plus importante.

À cause de ce coefficient  $\beta_a$ , la pression à l'intérieur de la bulle augmente plus rapidement pour des pressions initiales plus faibles, puisque l'évaporation est plus forte. C'est ce que montre la figure 7.2a. Ceci explique que la vitesse des ménisques augmente initialement plus rapidement pour des pressions initiales plus faibles (figure 7.2b).

Après cette phase de démarrage, la pression à l'intérieur de la bulle augmente quasi-linéairement, et l'influence de la pression initiale s'estompe. Alors, l'information importante est la valeur de la viscosité du liquide. Pour des pressions initiales faibles, la dynamique de la bulle s'établit plus rapidement, mais la dissipation visqueuse des bouchons de liquide est plus forte, ce qui conduit à plus ou moins long terme à des vitesses de ménisque plus faibles (figure 7.2b).

Ainsi, il est possible de conclure que l'établissement de la dynamique de la bulle en expansion est contrôlé en particulier par la densité de flux de masse évaporée à l'interface de la bulle, elle-même fortement liée au niveau de pression initiale dans la bulle. En revanche, une fois cette dynamique établie, c'est le bouchon de liquide, et en particulier sa viscosité, qui va contrôler les variations de vitesse du ménisque, et donc de pression dans la bulle.

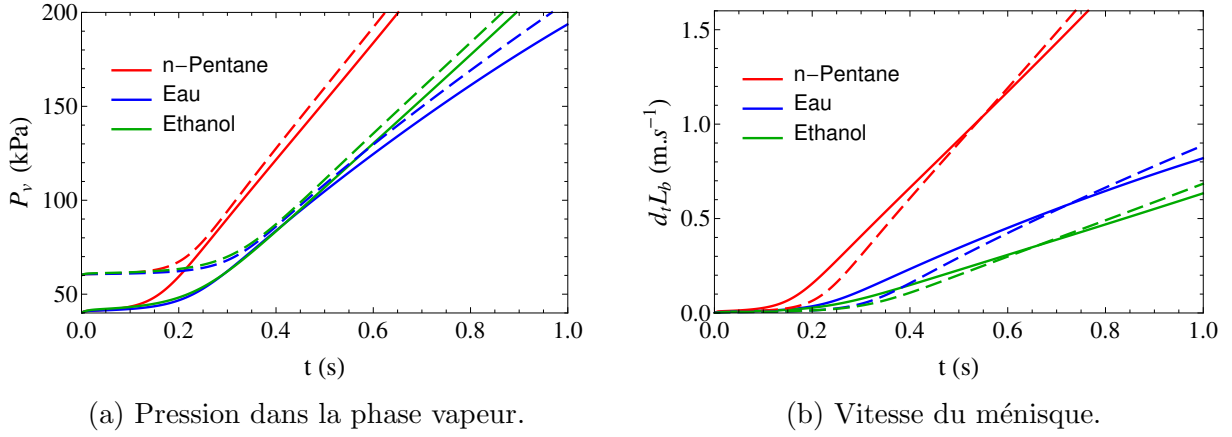


Figure 7.2: Influence de la pression vapeur initiale sur la dynamique de la bulle.  $\varphi_{in} = 2 \text{ kW.m}^{-2}$ . Lignes continues :  $P_{v0} = 40$  kPa, pointillées :  $P_{v0} = 60$  kPa.

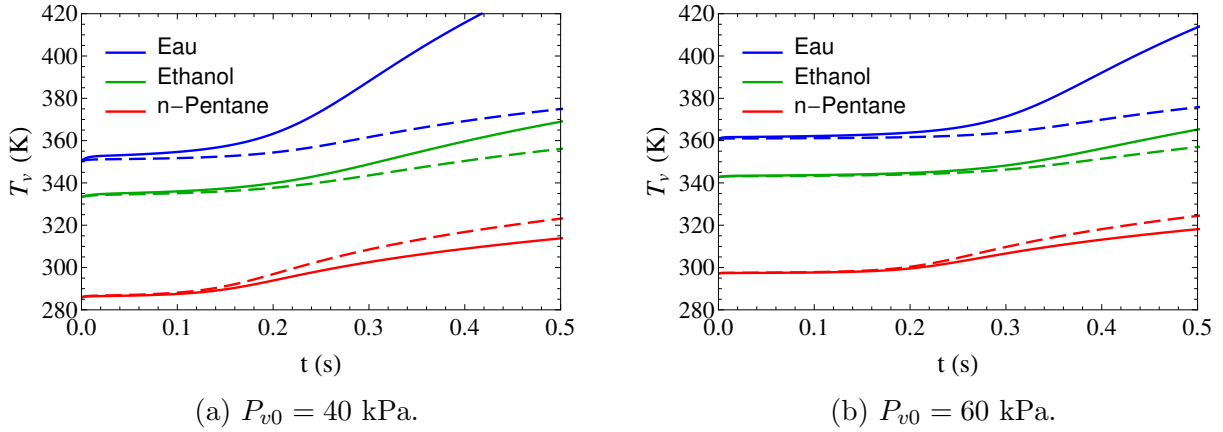


Figure 7.3: Variations de température dans une bulle soumise à une densité de flux de chaleur constante.  $\varphi_{in} = 2 \text{ kW.m}^{-2}$ . Lignes continues :  $T_v$ , pointillées :  $T_{sat}(p_v)$ .

La chaleur latente de vaporisation du n-pentane est très faible par rapport à celle de l'eau, donc la densité de flux de masse évaporée, à même densité de flux de chaleur imposée à la paroi, est plus grande pour le n-pentane. Ceci explique la mise en place rapide de la dynamique pour ce fluide. Ensuite, puisque la viscosité dynamique du n-pentane est faible, l'accélération du ménisque de n-pentane sera aussi plus grande que pour de l'eau.

Malgré une chaleur latente de vaporisation plus faible que pour l'eau, les niveaux de pression entre des bulles d'eau et d'éthanol sont très similaires, ce qui peut s'expliquer par la dissipation visqueuse importante générée par un bouchon d'éthanol. Une fois la dynamique de la bulle établie, en revanche, c'est bien la bulle d'eau qui possède une accélération plus forte, grâce à sa viscosité dynamique plus faible. La densité de flux de masse évaporée, après la mise en place de la dynamique d'expansion de la bulle, n'a plus d'influence sur la dynamique de la bulle.

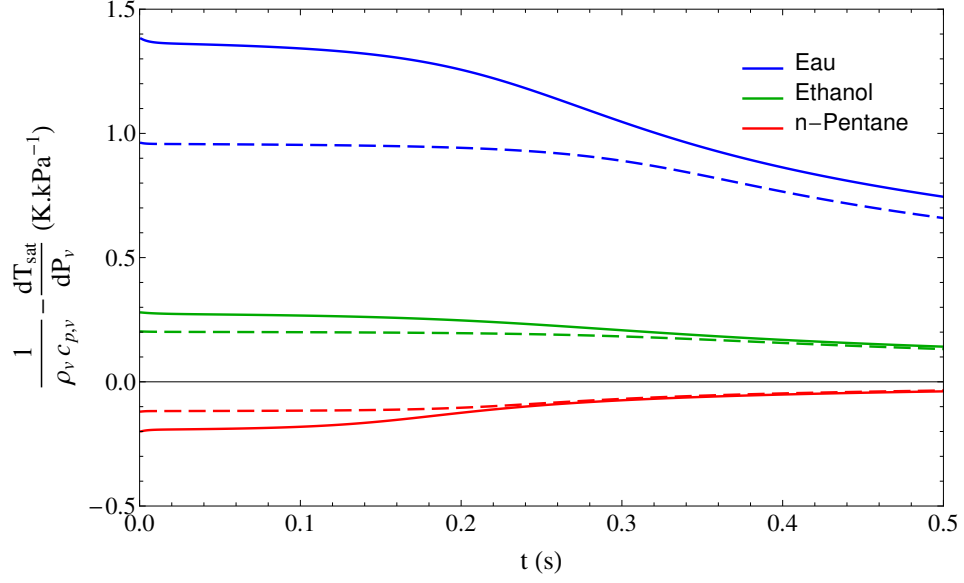


Figure 7.4: Divergence entre les variations de température de la phase vapeur, et les variations de température d'équilibre.  $\varphi_{in} = 2 \text{ kW.m}^{-2}$ . Lignes continues :  $P_{v0} = 40 \text{ kPa}$ , pointillées :  $P_{v0} = 60 \text{ kPa}$ .

### 7.5.2 Variations de température

Les variations de température présentées dans la figure 7.3 montrent des différences, plus ou moins importantes suivant les fluides, avec les variations de température de saturation du système.

Rappelons ici la relation entre les variations de température et de pression à l'intérieur de la bulle établie plus tôt dans le cadre de la définition du modèle résolu ici :

$$\rho_v c_{p,v} d_t T_v = d_t p_v + \frac{d_t Q}{V_v} \quad (7.40)$$

Nous avons supposé que la paroi est initialement complètement mouillée, et le laps de temps sur lequel le modèle est résolu ne permet pas à ce film de s'assécher. La contribution  $d_t Q$  est donc nulle ici, ce qui ramène le processus dans ce modèle à un processus iso-entropie spécifique (i.e. l'entropie par unité de masse dans la phase vapeur est supposée constante). Le coefficient contrôlant les variations de température en fonction des variations de pression dans la bulle est donc  $\rho_v c_{p,v}$ . C'est la valeur de ce coefficient qui nous informe sur la divergence plus ou moins forte entre la température de la phase vapeur et sa température d'équilibre.

La figure 7.4 représente la différence entre le coefficient  $1/(\rho_v c_{p,v})$  et la variation de la température de saturation en fonction de la pression dans la phase vapeur. Si cette différence est positive, alors la température de la vapeur augmente plus rapidement que la



température d'équilibre, et la vapeur peut être considérée comme surchauffée. Si elle est négative, la température de vapeur est inférieure à la température d'équilibre, et la vapeur est considérée sous-refroidie. En effet, la figure 7.4 explique facilement les tendances observées dans la figure 7.3. L'eau possède un coefficient  $1/(\rho_v c_{p,v})$  très supérieur à la variation  $dT_{sat}/dp_v$ , d'autant plus supérieur que la pression régnant initialement dans la phase vapeur est faible. Ceci explique la divergence rapide entre  $T_v$  et  $T_{sat}(p_v)$  observée dans la figure 7.3b, et la divergence plus rapide encore dans la figure 7.3a. A l'inverse, les figures 7.3 et 7.4 indiquent qu'une bulle de n-pentane est sous-refroidie.

Ces résultats soulèvent de nombreuses questions. Comment s'effectuent l'évaporation d'un film de liquide dans une bulle aussi surchauffée que l'eau? Inversement, n'y aurait-il pas des phénomènes de recondensation dans des bulles de n-pentane sous-refroidies?

Pour répondre à ces questions, il faut d'abord se souvenir que la condition aux limites imposée ici est particulière et différente de tous les modèles qui ont pu être élaborés précédemment. Il est imposé dans notre modèle une densité de flux de chaleur constante à la paroi du capillaire, quand la plupart des études théoriques publiées jusqu'à présent imposaient une différence de température constante entre la paroi solide et la température de saturation de la phase vapeur. De plus, dans la littérature, la phase vapeur est toujours considérée uniformément à l'équilibre, le flux d'évaporation étant dû à un déséquilibre localisé à l'interface [55, 13, 86, 88, 1, 18]. En fait, dans tous ces modèles, la phase vapeur est considérée comme un système ouvert, très grand, ce qui autorise l'hypothèse d'une phase vapeur à l'équilibre.

L'équation de Hertz-Knudsen modélisant la densité de flux de masse évaporée et établie dans l'annexe A utilise la différence de température entre l'interface liquide-vapeur et la température d'équilibre de la phase vapeur. Le fait d'imposer une densité de flux de chaleur à la paroi, et de définir comme température de référence du modèle la température ambiante à l'extérieur du tube capillaire, permet d'obtenir une température de film de liquide toujours supérieure à la température d'équilibre de la phase vapeur, et donc d'assurer l'évaporation du film, même si la phase vapeur elle-même est surchauffée ou sous-refroidie. Le fait que la masse ajoutée à la bulle de vapeur par l'évaporation du film de liquide soit à la température d'équilibre et non à la température de la vapeur n'a que peu d'influence, car l'élévation de température du système est principalement due à l'apport de masse lui-même, à travers le coefficient  $1/(\rho_v c_{p,v})$ .

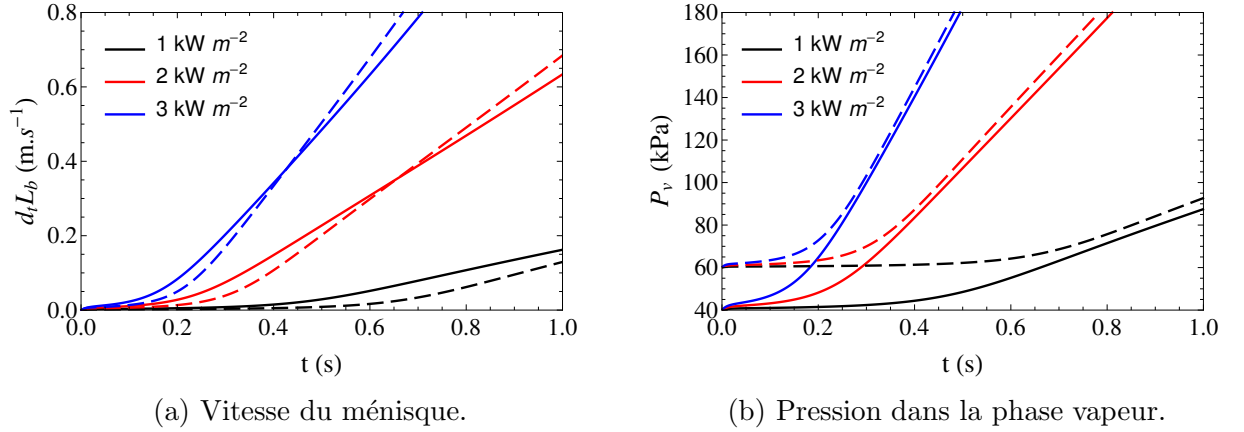


Figure 7.5: Influence de la densité de flux de chaleur imposée sur la dynamique d'une bulle d'éthanol. Lignes continues :  $P_{v0} = 40$  kPa, pointillées :  $P_{v0} = 60$  kPa.

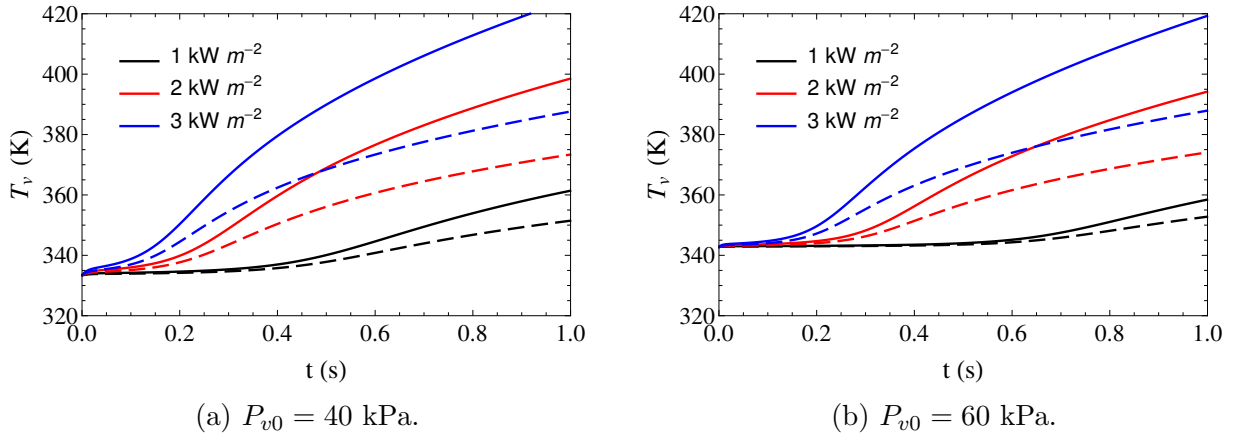


Figure 7.6: Influence de la densité de flux de chaleur imposée sur les variations de température dans une bulle d'éthanol. Lignes continues :  $T_v$ , pointillées :  $T_{sat}(p_v)$ .

### 7.5.3 Densité de flux de chaleur imposée à la paroi

Les figures 7.5 et 7.6 représentent l'influence de la densité de flux de chaleur imposée sur la dynamique de la bulle, ainsi que sur les variations de température. Intuitivement, un chargement thermique plus important appliqué à la bulle entraîne une dynamique d'expansion plus rapide, puisque la masse de vapeur créée par l'évaporation du film de liquide est d'autant plus importante.

Les mêmes calculs ont été effectués pour de l'eau et du n-pentane, et ont montré des effets identiques de la densité de flux de chaleur sur l'expansion de bulle de ces deux fluides.

Une densité de flux de chaleur plus grande engendre aussi une surchauffe plus importante de la phase vapeur. Cependant, le fait que la vapeur ne commence à surchauffer

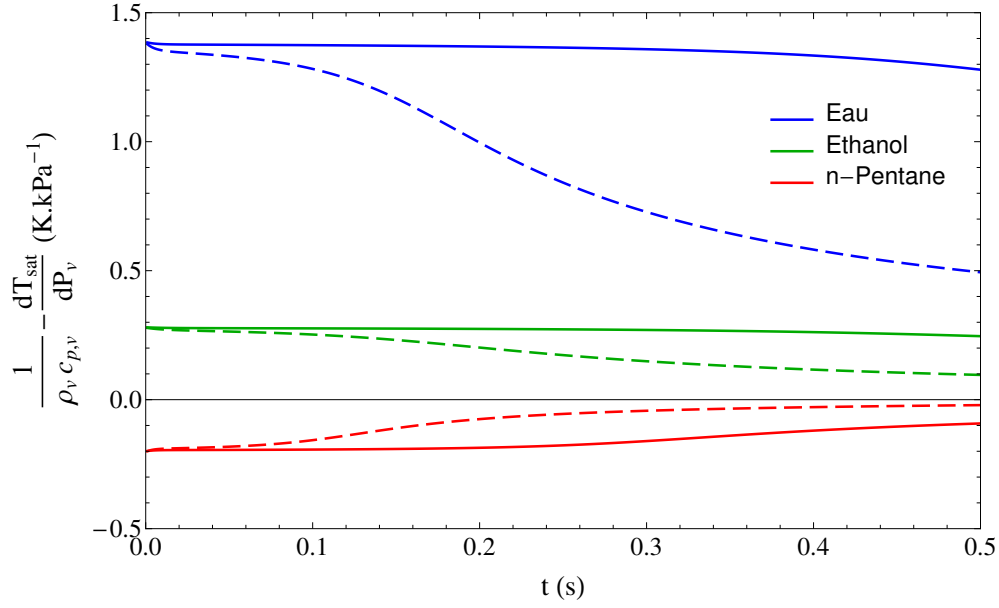


Figure 7.7: Divergence entre les variations de température de la phase vapeur, et les variations de température d'équilibre. Lignes continues :  $\varphi_{in} = 1 \text{ kW.m}^{-2}$ , pointillées :  $\varphi_{in} = 3 \text{ kW.m}^{-2}$ .

que tard pour des densité de flux de chaleur faibles n'est pas dû à un coefficient  $\rho_v c_{p,v}$  qui serait plus faible. Ce coefficient dépend de la pression initiale dans la bulle de vapeur, et est donc indépendant du chargement thermique subséquent, comme montré par la figure 7.7. Cette figure montre d'ailleurs que pour des densités de flux de chaleur plus importantes, l'augmentation relative de la surchauffe (ou du sous-refroidissement) chute plus rapidement qu'à des densités de flux plus faibles. C'est donc bien la dynamique globale de l'expansion qui engendre la surchauffe, plus lente à survenir pour une faible densité de flux.

# Conclusion

Il a été mis en place dans ce mémoire le modèle théorique d'une bulle seule se déplaçant à vitesse constante dans un tube de dimension capillaire. Ce modèle permet de prendre en compte les transferts thermiques dans un ménisque développé, ainsi que dans un film de liquide d'épaisseur micrométrique, et les couplages dynamiques et thermiques entre ces deux configurations.

La première différence avec les travaux déjà publiés, s'agissant de la modélisation de la dynamique d'une bulle dans un contexte anisotherme, est la prise en compte d'une densité volumique de flux de chaleur dans la paroi du capillaire. Il est donc considéré une condition mixte de Newton à la paroi, prenant en compte les transferts thermiques avec l'extérieur du tube, plutôt qu'une condition de Dirichlet (différence de température avec la température de saturation de la phase vapeur imposée). Le problème de la conduction de cette densité de flux de chaleur dans le mur n'est pas inclus dans le modèle, car il empêche de considérer un problème quasi-permanent, et que son apport semble faible au vu du développement théorique important à effectuer. La phase vapeur constituant la bulle est considérée à propriétés uniformes. La température de référence considérée n'est pas la température de saturation de la phase vapeur, mais la température à l'extérieur du capillaire. Cette définition de la température de référence est très importante dans notre démarche de modélisation globale d'une bulle anisotherme, car elle permet la variation de la température de saturation de la vapeur dans le temps.

Trois modèles particuliers ont été mis en place, décrivant respectivement la physique d'un ménisque, d'un film de liquide micrométrique, et d'une zone de transition entre le ménisque et le film. Un développement en série de Taylor, dans lequel les paramètres de perturbation sont le nombre capillaire (à la puissance un tiers) et le nombre de Reynolds, est effectué pour simplifier ces modèles, et ne prendre en compte dans un premier temps que les effets physiques prépondérants. Ces résultats peuvent être complétés par l'ajout des ordres supérieurs du développement.

Le modèle de la phase liquide est résolu dans un cadre permanent suivant les différents paramètres que sont la densité de flux de chaleur imposée au mur, la vitesse de la bulle et la température de saturation de la phase vapeur. La densité de flux de masse évaporée à l'interface liquide-vapeur entraîne alors une modification de la température et de la pression dans la bulle.

L'étude du modèle permanent mis en place, à l'ordre principal ainsi qu'aux ordres supérieurs, a permis de définir deux corrélations portant sur la hauteur de film déposé par le bouchon de liquide et sur la longueur d'assèchement du film. Ces corrélations sont fonction du nombre capillaire et d'un nombre d'évaporation, lui-même fonction de la densité de flux imposée à la paroi et de la vitesse de la bulle. Il est cependant à remarquer que la longueur d'assèchement calculée ici ne prend pas en compte la physique particulière de la ligne triple.

Si une zone asséchée est considérée à la paroi du tube capillaire, il est supposé qu'un film adsorbé subsiste sur la paroi asséchée. La pression de disjonction n'est pas prise en compte au moment de l'assèchement du film de liquide, ainsi que la dynamique particulière de la ligne triple. L'hypothèse, très forte, que la ligne triple au moment de l'assèchement du film de liquide se déplace à la même vitesse que le ménisque déposant ce film, nous empêche de modéliser à la fois un possible démouillage de la paroi (dû à la formation d'un angle de contact macroscopique fixé par les transferts au niveau de la ligne triple), ainsi que la formation d'un bourrelet de liquide avant l'assèchement. Les valeurs de longueur d'assèchement dérivées du modèle resteront donc des estimations, jusqu'à une possible adaptation du modèle, qui nous permette d'y inclure une modélisation plus précise de l'assèchement du film de liquide.

Le raccordement du ménisque arrière en déplacement avec un film adsorbé est en revanche considéré dans ce mémoire, et montre des ondulations de l'interface au niveau de la ligne triple, dues non pas au transfert de chaleur en proche paroi, mais plutôt au remouillage du film adsorbé par cette ligne triple.

La résolution du modèle associé à la partie arrière de la bulle, quand il n'y a pas d'assèchement, met en évidence la formation d'un bourrelet de liquide entre le film de liquide et le ménisque arrière. La taille de ce bourrelet est fortement dépendante de la densité de flux de chaleur imposée à la paroi. Le ménisque arrière possède quant à lui un rayon de courbure plus grand que celui du ménisque avant. Pour des valeurs particulières du nombre d'évaporation, les bourrelets de liquide présentent des tailles très importantes, qui ne sont pas de l'ordre des longueurs caractéristiques utilisées pour écrire le modèle qui a permis de les calculer.

Le ménisque avant reste sphérique à l'ordre principal, de rayon égal au rayon du capillaire, et aucune information ne peut être obtenue sur les champs de température et de vitesse dans le bouchon de liquide. Aux ordres supérieurs, la résolution d'équations harmonique (sur le champ de température) et biharmonique (pour le champ de vitesse) dans le bouchon de liquide doit être entreprise pour pouvoir progresser dans la résolution du modèle complet. Ces résolutions analytiques nécessitent des évaluations numériques d'intégrales infinies qui n'ont pas pu être réalisées dans le cadre de ce mémoire, en raison du temps de calcul nécessaire. Il a cependant été montré que la résolution de notre modèle, au-delà de ces blocages matériels, ne présente aucune difficulté théorique.

En résumé, le modèle permanent de la phase liquide entourant une bulle chauffée nous a permis :

- 
- d'obtenir une corrélation analytique précise sur la hauteur de film déposé en fonction du chargement thermique et de la vitesse du ménisque. Une corrélation isotherme plus complète que celle de Bretherton [12] a d'ailleurs été proposée pour permettre une meilleure comparaison avec nos résultats.
  - de calculer le champ de température dans le bouchon de liquide à l'ordre principal, où seule la conduction dans le liquide est prise en compte. Ce calcul met en évidence un flux d'évaporation important au centre de la conduite. Ce résultat est cependant susceptible d'être quelque peu modifié par les corrections apportées par les ordres supérieurs.
  - de mettre en évidence une ondulation de l'interface liquide-vapeur au niveau de la ligne triple dans le cas d'un ménisque avançant sur un film adsorbé. Ces ondulations sont dues au déplacement de cette ligne triple, et non au chargement thermique appliqué à la paroi.

Le modèle élaboré dans ces pages présente un potentiel important, concernant les informations pouvant encore en être tiré sur le comportement de la phase liquide entourant une bulle dans un capillaire chauffé. Une fois ces informations complémentaires obtenues, il est possible d'envisager plusieurs axes d'améliorations du modèle pour le rendre plus général encore.

- Il peut être envisagé l'obtention du champ de vitesse dans le bouchon de liquide, et l'évaluation de son influence sur le champ de température et la forme de l'interface dans cette région. Pour ce faire, il faudra certainement passer par l'évaluation des équations de bilan (aussi bien dynamique que thermique) sur un domaine discret. La solution discrète générée par cette évaluation devra être évaluée continument sur l'interface liquide-vapeur.
- Une fois les corrections de la forme du ménisque obtenues, il sera possible de raccorder ces informations avec les régions de transition et du film, pour obtenir une évaluation plus précise encore de la hauteur de film, ainsi que la thermodynamique de la phase liquide dans ces régions.
- Une sensible amélioration du modèle serait de prendre en compte la dynamique particulière de la ligne triple, et l'influence de l'angle de contact macroscopique étudié par Mathieu [53] et Janeček [37].
- Par contre, prendre en compte le démouillage de la paroi du capillaire, et la formation d'un bourrelet à la fin du film de liquide possédant une vitesse propre, empêche la résolution du modèle dans un cadre permanent.

Le modèle suscite aussi des interrogations, et certains résultats doivent pousser à trouver une meilleure représentation de la physique dans certaines parties de la bulle,

en particulier dans le cas d'un ménisque remouillant un film micrométrique, où certaines plages de paramètres ne sont pas correctement modélisées. La modélisation classique mise en place ici doit être revisitée, pour lui permettre d'obtenir des résultats physiquement acceptables sur l'ensemble de la plage de fonctionnement d'un caloduc oscillant.

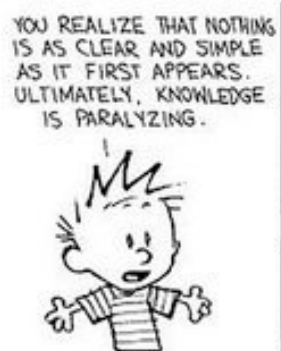
Tout ces résultats en régime permanent, s'ils restent partiels pour l'instant, fournissent néanmoins une base suffisante permettant de modéliser correctement l'influence de la phase liquide sur la thermodynamique de la bulle de vapeur elle-même.

Le modèle thermodynamique transitoire d'une bulle de vapeur, mis en place dans le dernier chapitre de ce mémoire, laisse entrevoir la possibilité de déterminer quels sont les paramètres importants agissant sur la dynamique et les propriétés thermophysiques de la bulle. En particulier, le modèle montre que la température de la phase vapeur peut s'écarter de manière non négligeable des conditions d'équilibre. Le paramètre important dans cette variation est le produit  $\rho_v c_{p,v}$ , propre à chaque fluide. Ces résultats indiquent que le modèle mis en place peut-être une mine d'information, à condition d'être complété et étendu.

- La prise en compte de l'assèchement du film de liquide déposé par un ménisque reculant, entraînant une élévation de la température de paroi, n'a pas été effectuée ici. Cependant, la section 7.2 montre que cette amélioration ne pose pas de problèmes d'implémentation insurmontables.
- Un aspect plus délicat est la prise en compte de ménisques avançant, soit sur un film de liquide d'épaisseur micrométrique, soit sur un film adsorbé, et remouillant la paroi du capillaire.

Une fois ces problèmes d'implémentations résolus, il sera possible de s'intéresser à la dynamique de la bulle sur des échelles de temps plus longues, et de pousser plus loin l'investigation des paramètres importants dans le mouvement d'une bulle chauffée. Il sera aussi possible de considérer des conditions aux limites différentes des hypothèses de symétries faites ici, voire de traiter en parallèle plusieurs bulles, chauffées ou non, séparées par des bouchons de liquide plus ou moins longs.

La modélisation théorique du démarrage et du fonctionnement d'un caloduc oscillant pourrait en être grandement avancée.







# Annexes



# Annexe A

## Théorie cinétique des gaz

### A.1 Principes de base

L'évaporation ou la condensation d'un fluide dérive des conditions thermodynamiques de ce fluide à l'interface où s'effectue ce transfert de masse, et en particulier de leur variation soudaine à travers cette interface considérée sans épaisseur. La théorie cinétique des gaz, expliquant les différentes propriétés d'un fluide dans sa phase vapeur grâce au comportement cinétique des molécules constituant ce gaz, permet entre autres de relier les conditions thermodynamiques du gaz proche des limites du domaine vapeur avec le flux d'évaporation à cette limite, fournissant ainsi une condition supplémentaire au problème diphasique qui nous intéresse. L'étude présentée dans cette annexe est issue de la thèse fondatrice de Schrage [72], reprise et explicitée dans l'ouvrage classique de Van P. Carey [14].

Le concept fondamental de cette théorie est que les vitesses des molécules constituant la phase vapeur ont une répartition statistique dans l'espace des vitesses ( $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ). C'est-à-dire que, un volume unitaire de gaz étant constitué de  $n$  molécules,  $dn_{uvw}$  est le nombre de ces molécules comprises, au point  $(u, v, w)$  dans l'espace des vitesses, dans un cube de dimension  $du dv dw$ , et ce nombre  $dn_{uvw}$  est lié à  $n$  par une fonction statistique appelée *fonction de distribution*, notée  $f$ .

$$\frac{dn_{uvw}}{n} = f du dv dw, \quad (\text{A.1})$$

ou, sous une forme vectorielle,  $\mathbf{C}$  étant le vecteur vitesse associé au point  $(u, v, w)$  dans l'espace des vitesses :

$$\frac{dn_{uvw}}{n} = f d\mathbf{C} \quad (\text{A.2})$$

Cette fonction de distribution est indispensable pour évaluer les différentes propriétés du gaz, comme sa vitesse totale, son énergie, la pression qu'il applique sur une surface,

etc., à travers la simple moyenne :

$$\overline{\Psi} = \int \Psi f d\mathbf{C} \quad (\text{A.3})$$

### A.1.1 Gaz uniforme

Quand le gaz est à l'équilibre thermodynamique, c'est à dire que ses propriétés macroscopiques ne varient ni dans l'espace, ni dans le temps, la fonction de distribution peut être dérivée d'une étude de mécanique statistique, et est connue sous le nom de *fonction de distribution de Maxwell*.

$$f = \left( \frac{\beta}{\pi^{1/2}} \right)^3 e^{-\beta^2(u^2+v^2+w^2)} \quad (\text{A.4})$$

La grandeur  $\beta$  peut être déterminée grâce à l'expression du nombre de complexions du gaz et de la définition statistique de l'entropie. Elle a pour expression :

$$\beta = \sqrt{\frac{M_g}{2 R_g T}} \quad (\text{A.5})$$

Ce modèle de distribution permet de déterminer facilement les propriétés thermodynamiques d'un gaz à l'équilibre thermodynamique. En particulier, il est possible de calculer le flux de masse d'un gaz uniforme à travers un plan noté  $\mathbf{s}$  de surface unitaire dont la normale est la direction des vitesses  $\mathbf{u}$ , représentée sur la figure A.1. L'indice  $s^+$  du flux de masse  $\dot{m}$  représente les molécules traversant le plan  $\mathbf{s}$  avec une vitesse positive  $u > 0$ . Pour calculer l'expression de ce flux de masse  $\dot{m}_{s^+}$ , la quantité  $\Psi$  de l'équation A.3

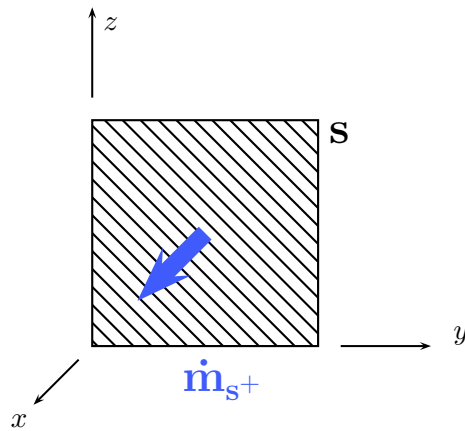


Figure A.1: Flux de masse à travers un plan

---

est remplacée par  $\rho u$ , et il ne faut intégrer cette grandeur que sur les vitesses  $u$  positives :

$$\dot{m}_{s+} = \rho_s \left( \frac{\beta_s}{\pi^{1/2}} \right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} u e^{-\beta_s^2(u^2+v^2+w^2)} du dv dw \quad (\text{A.6})$$

Ici  $\rho$  et  $\beta$  sont indicés par  $s$  pour indiquer que ces grandeurs sont évaluées sur le plan  $\mathbf{s}$ . Les intégrales portant sur les vitesses transversales  $v$  et  $w$  sont des intégrales de Gauss. L'intégration suivant les vitesses normales  $u$  donne :

$$\int_0^{\infty} u e^{-\beta_s^2 u^2} du = \frac{1}{2\beta_s^2} \quad (\text{A.7})$$

Le flux de masse surfacique, à travers la surface  $\mathbf{s}$ , de molécules possédant une vitesse positive s'écrit alors :

$$\dot{m}_{s+} = \frac{\rho_s}{2\pi^{1/2} \beta_s} \quad (\text{A.8})$$

Bien sûr, puisque que le gaz est uniforme, le flux de masse surfacique de molécules possédant une vitesse négative est identique :

$$\dot{m}_{s-} = -\frac{\rho_s}{2\pi^{1/2} \beta_s} \quad (\text{A.9})$$

### A.1.2 Gaz non-uniforme

Un déplacement global et permanent du gaz ne générera pas de variation des propriétés macroscopiques de celui-ci dans l'espace ni dans le temps. En revanche, une composante rotationnelle de ce champ de vitesse, un transfert de chaleur, ou une espèce moléculaire différente se déplaçant différemment va entraîner une non-uniformité du gaz. Dans ce cas, la fonction de distribution des vitesses n'est plus de la forme proposée par Maxwell, mais peut être modélisée par *l'équation intégrale-différentielle de Boltzmann* décrivant la relaxation d'un gaz hors d'équilibre vers la distribution de Maxwell.

Si la fonction de distribution de Maxwell ne peut modéliser précisément les propriétés thermodynamiques d'un gaz non-uniforme, elle peut cependant en donner des valeurs approchées, puisque l'analyse de l'équation de Boltzmann montre qu'un gaz hors d'équilibre tend fortement à revenir vers son état d'équilibre.

Le déséquilibre des flux de masse à travers une interface entre deux phases de natures différentes, l'une d'elle étant un gaz, est généralement dû à un saut de température et donc à un transfert de chaleur, et va de manière évidente générer une non-uniformité du gaz proche de l'interface en plus de générer un flux d'évaporation ou de condensation. Ce problème va être contourné dans la suite de cette étude en supposant que cette zone de non-uniformité du gaz ne s'étend que sur quelques *libres parcours moyen* du gaz depuis

l'interface liquide-vapeur. Cette zone de non-uniformité ne sera pas considérée. Au-delà de cette distance, le gaz sera considéré uniforme, possédant une vitesse moyenne permanente, différente de la vitesse de l'interface, causée par le flux de masse évaporée ou condensée.

Bien que très grossière, il a été vérifié que les prédictions de cette approche sont consistantes, et elle reste de loin la plus facile à mettre en oeuvre, et elle est largement utilisée de nos jours.

## A.2 Transfert de masse entre phase

### A.2.1 Flux d'évaporation absolu à l'équilibre

Le flux de masse à travers une surface quelconque a déjà été exprimé dans la section précédente. Intéressons-nous à présent à une interface liquide-gaz notée  $\mathbf{s}$ , qui dans un premier temps est considérée à l'équilibre et représentée sur la figure A.2. Il existe forcément un flux noté  $\dot{m}_{s-}$  arrivant du gaz sur cette interface. Depuis Hertz en 1882 et les premiers travaux sur le flux d'évaporation absolu d'un gaz, il est admis qu'une interface à l'équilibre thermodynamique n'est pas absolument hermétique au transfert de masse, mais plutôt que les flux de masse évaporée et condensée se compensent exactement. Une perturbation, comme par exemple un transfert de chaleur entraînant un saut de température à l'interface générerait donc un déséquilibre des flux de masse traversant l'interface, donnant lieu à un flux net d'évaporation ou de condensation.

D'après Schrage [72], deux hypothèses en particulier sont nécessaires pour définir une interface à l'équilibre : que la position de l'interface soit exactement connue, l'incertitude sur cette position étant faible devant le libre parcours moyen, et que le gaz en contact avec cette interface soit uniforme.

Dans ces conditions, et selon l'approche de Hertz, le flux de masse  $\dot{m}_{s-}$  arrivant sur la surface  $\mathbf{s}$  va se scinder en deux, comme schématisé sur la figure A.2 : une partie se con-

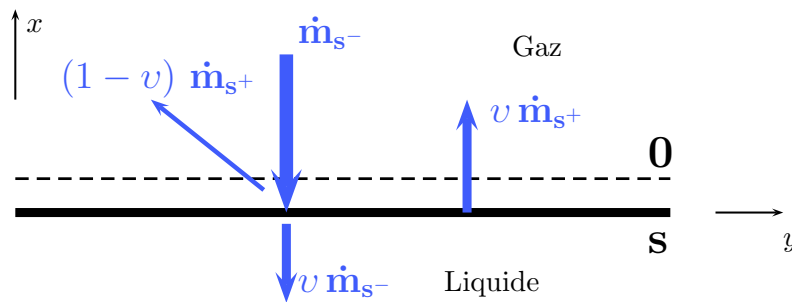


Figure A.2: Flux de masse à l'interface liquide-vapeur.

---

dense, l'autre rebondit sur la surface liquide à cause de la différence importante des masses volumiques des deux phases. La grandeur  $v_e$  représente la fraction du flux de masse  $\dot{m}_s-$  qui est effectivement condensée. Elle est appelée indifféremment coefficient d'évaporation ou d'accomodation. Puisque pour l'instant l'interface est supposée à l'équilibre, le flux d'évaporation absolu est donc :

$$v_e \dot{m}_{s+} = v_e \frac{\rho_s}{2\pi^{1/2} \beta_s} \quad (\text{A.10})$$

Cette expression du flux de masse évaporée à l'équilibre peut-elle être utilisée pour modéliser une interface hors-équilibre? Schrage [72] pense que oui, en voici la justification.

### A.2.2 Interface hors d'équilibre

Tout d'abord, le taux avec lequel les molécules s'arrachent à la surface liquide pour aller vers le gaz est a priori influencé principalement par les conditions thermodynamiques de l'interface, en particulier les valeurs de température et de pression à cette interface. Le gaz non-uniforme se trouvant juste au-dessus de l'interface imprime à l'interface, à travers les collisions de molécules, des forces tangentielles qui ne seront peut-être pas nulles (à cause de sa non-uniformité), mais ces moments moyens n'impactent pas fondamentalement le flux d'évaporation absolu, en particulier à cause de la grande différence de masse volumique entre le liquide et le gaz.

Cette différence de masse volumique permet aussi de supposer négligeable l'effet de l'écoulement moyen du gaz généré par la masse *évaporée* sur le flux d'évaporation absolu. En revanche, la vitesse de cet écoulement moyen du gaz aura un impact non négligeable sur le flux de *condensation* absolu, et c'est à travers cette différence de traitement des flux de masse évaporée et condensée qu'il sera possible d'obtenir une expression approchée du flux de masse global à travers une interface hors d'équilibre.

### A.2.3 Flux de condensation absolu à l'interface

Considérons une surface **0** très proche de l'interface **s** coté vapeur, et supposons que le gaz situé au dessus est à l'équilibre (la zone de non-uniformité générée par le déséquilibre des transferts de masse est comprise entre les plans **s** et **0**). Si ces transferts de masse à l'interface sont hors-équilibre, alors le gaz au-dessus de **0**, s'il reste uniforme, possédera malgré tout une vitesse globale, notée  $U_0$ , pouvant être positive (évaporation) ou négative (condensation). Les surfaces **s** et **0** sont supposées assez proches pour négliger l'effet de la vitesse globale du gaz entre ces surfaces.

Le flux de masse traversant **0** vers **s** (avec une vitesse négative) s'exprime donc comme



suit :

$$\dot{m}_{0-} = \rho_0 \left( \frac{\beta_0}{\pi^{1/2}} \right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 u e^{-\beta_0^2((u-U_0)^2+v^2+w^2)} du dv dw \quad (\text{A.11})$$

C'est-à-dire, après intégration suivant  $v$  et  $w$  :

$$\dot{m}_{0-} = \frac{\rho_0 \beta_0}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^0 u e^{-\beta_0^2(u-U_0)^2} du \quad (\text{A.12})$$

Après un changement de variable détaillé dans Schrage [72],  $\dot{m}_{0-}$  peut s'écrire de la forme :

$$\dot{m}_{0-} = -\frac{\rho_0}{2\pi^{1/2} \beta_0} \left[ e^{-\beta_0^2 U_0^2} - \pi^{1/2} \beta_0 U_0 (1 - \text{erf}(\beta_0 U_0)) \right] = -\frac{\rho_0}{2\pi^{1/2} \beta_0} F \quad (\text{A.13})$$

Ici la fonction erf est la fonction d'erreur de Gauss, et  $F$  représente le facteur correctif du flux de masse condensée dû à la vitesse globale de la phase gazeuse au-dessus de  $\mathbf{0}$ , fonction de la grandeur  $\beta_0 U_0$ .

#### A.2.4 Flux de masse à travers une interface liquide-gaz hors équilibre

Tout comme le flux de masse évaporée, seulement une fraction de la masse traversant  $\mathbf{0}$  avec une vitesse négative va effectivement se condenser, et il est généralement supposé que cette fraction *condensée*  $v_c$  est identique à la fraction *évaporée*  $v_e$ , dans le cas à l'équilibre comme hors-équilibre. Il est donc possible d'écrire  $v_e = v_c = v$ , et le flux de masse globale à l'interface liquide-gaz est simplement la somme des flux de masse la traversant :

$$\dot{m} = v \frac{\rho_s}{2\pi^{1/2} \beta_s} - v \frac{\rho_0}{2\pi^{1/2} \beta_0} F \quad (\text{A.14})$$

ou, en utilisant la loi des gaz parfaits pour évaluer la masse volumique du gaz en fonction des pressions et températures locales :

$$\dot{m} = v \sqrt{\frac{M_g}{2\pi R_g}} \left( \frac{P_s}{T_s^{1/2}} - F \frac{P_0}{T_0^{1/2}} \right) \quad (\text{A.15})$$

La fonction de correction  $F$  est représentée sur la figure A.3. Dans la limite des petites vitesses, c'est-à-dire pour des grandeurs  $\beta_0 U_0$  faibles devant l'unité, cette fonction est correctement évaluée par :

$$F = 1 - \beta_0 U_0 \pi^{1/2} \quad (\text{A.16})$$

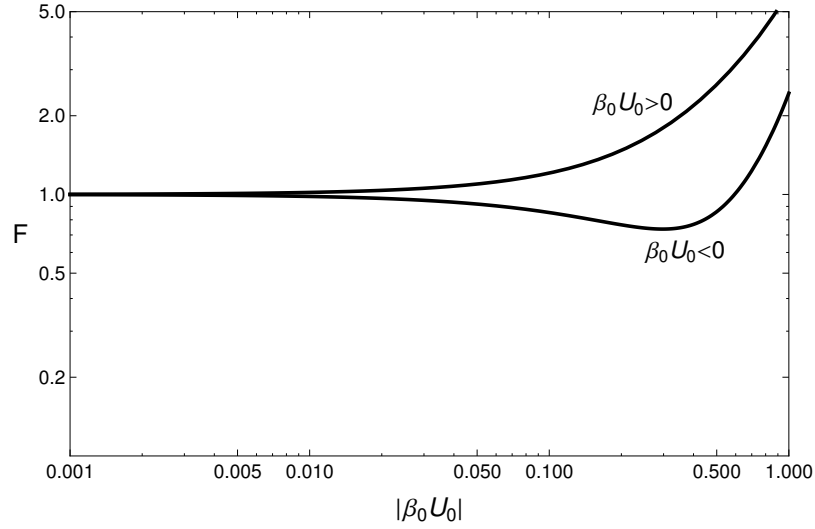


Figure A.3: Fonction de correction  $F$  dépendant de la vitesse globale du gaz  $U_0$  et du paramètre physique  $\beta_0$ .

De plus, la vitesse globale du gaz  $U_0$  est due au déséquilibre du flux d'évaporation. Il est donc possible d'écrire :

$$U_0 = \frac{\dot{m}}{\rho_0} = \frac{R_g T_0}{P_0 M_g} \dot{m} \quad (\text{A.17})$$

$F$  peut donc s'écrire :

$$F = 1 - \sqrt{\frac{\pi R_g}{2 M_g} \frac{T_0^{1/2}}{P_0}} \quad (\text{A.18})$$

En réarrangeant l'équation A.15, l'expression du flux de masse global à l'interface liquide-vapeur s'écrit :

$$\dot{m} = \frac{2v}{2-v} \sqrt{\frac{M_g}{2\pi R_g}} \left( \frac{P_s}{T_s^{1/2}} - \frac{P_0}{T_0^{1/2}} \right) \quad (\text{A.19})$$

Dans la plupart des études consultées où cette équation est utilisée, le coefficient d'accommodation  $v$  est supposé égal à 1. Cependant beaucoup de mesures expérimentales des coefficients d'évaporation et de condensation, en particulier pour des fluides polarisés comme l'eau, montrent des valeurs très inférieures à 1. Il est de plus généralement admis (cf. Van P. Carey [14], p. 119) que l'hypothèse selon laquelle les coefficients d'évaporation et de condensation sont considérés égaux ne représente correctement la réalité que pour des fluides purs.

Marek et Straub [52] en particulier ont compilé une large variété de résultats expérimentaux qui laissent à penser que la contamination quasi inévitable d'un fluide dans des conditions industrielles, ainsi que la grande variété des configurations de transfert

de masse à l'interface, peuvent entraîner une perte importante d'efficacité du transfert de masse à l'interface liquide-gaz, et donc une perte d'efficacité du transfert thermique. Les expériences synthétisées par Marek et Straub [52] montrent que ces coefficients d'évaporation et de condensation ne sont pas forcément égaux, même si leurs ordres de grandeur sont généralement identiques. Surtout, les résultats s'échelonnent sur une large plage de valeurs, de  $10^{-3}$  à 1. Ces coefficients semblent diminuer avec l'augmentation des sauts de pression et de température.

Quel coefficient d'accommodation choisir? Il semble très difficile de discriminer les valeurs très différentes fournies par la littérature, et les corrélations caractérisant la dépendance des coefficients d'accommodation avec les pression et température de l'interface sont rares. Il a donc été choisi dans cette étude de considérer comme valide la simplification  $v_e = v_c = v$ , et de considérer que toutes les molécules arrivant sur l'interface la traversent et ne sont pas réfléchies ( $v = 1$ ).

### A.3 Equation de Hertz-Knudsen

L'expression du flux de masse à l'interface liquide-gaz donnée par l'équation A.15 est fonction de sauts de température et de pression sur une longueur de seulement quelques libres parcours moyens séparant les plan  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{0}$ , et est appelée communément *équation de Hertz-Knudsen*. Elle peut être linéarisée pour faire apparaître explicitement les sauts de température et de pression à l'interface.

Dans la suite de ce travail, les différentes grandeurs physiques évaluées à l'interface liquide-gaz, c'est-à-dire le plan  $\mathbf{s}$ , seront indicées par *int*. Le saut de température de  $\mathbf{s}$  à  $\mathbf{0}$  sera faible malgré les transfert de chaleur et de masse. Il est donc possible, suivant Wayner [86] et la plupart des travaux utilisant l'équation de Hertz-Knudsen (voir par exemple [1]), de linéariser  $\dot{m}$  comme suit :

$$\dot{m} = \frac{2v}{2-v} \sqrt{\frac{M_g}{2\pi R_g T_0^{1/2}}} (P_{int,v} - P_0) \quad (\text{A.20})$$

Ici  $P_{int,v}$  représente la pression exercée sur une interface à l'équilibre, à la température  $T_{int}$ . L'équation de Clapeyron donnant la différence entre la pression d'équilibre à l'interface  $P_{int,v}$  et la pression réelle  $P_{int}$ , en fonction de variations de température et de pression faible, est enfin utilisée (voir [55] ou [87]) :

$$(P_{int,v} - P_0) = \frac{\rho_v h_{lg}}{T_0} (T_{int} - T_0) + \frac{V_l P_v}{R_g T_0} (P_{int} - P_0) \quad (\text{A.21})$$

$V_l$  représente le volume molaire du liquide.

---

La définition de la densité de flux de masse à travers l'interface est donc la suivante :

$$\dot{m} = a(T_{int}(h) - T_{sat}) - b(\Phi + \frac{\sigma}{R}) \quad (\text{A.22})$$

La grandeur  $\Phi$  représente le saut de pression modifié à travers l'interface liquide-vapeur ( $P_v - P_{liq} - \sigma/R$ ), défini au chapitre 2. Les deux résistances d'interface relatives aux sauts de pression et de température ont pour expressions :

$$a = \sqrt{\frac{M_g}{2\pi R_g T_{sat}^{1/2}}} \frac{\rho_v h_{lg}}{T_{sat}} \quad (\text{A.23a})$$

$$b = \sqrt{\frac{M_g}{2\pi R_g T_{sat}^{1/2}}} \frac{V_l P_v}{R_g T_{sat}} \quad (\text{A.23b})$$

Dans le cas où l'épaisseur de liquide est assez importante, il est possible de négliger la contribution du saut de pression à l'interface, comme le font par exemple Wilson et Davis [88] ou Burelbach *et al.* [13]. Une autre relation pourra donc être utilisée pour modéliser le flux de masse à l'interface liquide-vapeur :

$$K_{dim} \dot{m} = T_{liq}(h) - T_{sat} \quad (\text{A.24})$$

avec la résistance d'interface dimensionnelle (en  $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ) liée au saut de température donnée par :

$$K_{dim} = \sqrt{\frac{2\pi R_g T_{sat}}{M_g}} \frac{T_{sat}}{\rho_v h_{lg}} \quad (\text{A.25})$$



## Annexe B

### Courbure locale d'une interface

Le calcul de la courbure locale de l'interface liquide-vapeur dans notre problème est largement basé sur le livre de Manfredo Do Carmo [20] traitant de géométrie différentielle des courbes et surfaces. Dans cet ouvrage, à la suite de Gauss qui le premier a développé cette théorie géométrique, l'auteur définit la courbure locale d'une surface comme la variation totale du vecteur normal à la surface. Ce vecteur normal est lui même défini comme suit :

$$\mathbf{N} = \frac{d_u \mathbf{X} \wedge d_v \mathbf{X}}{|d_u \mathbf{X} \wedge d_v \mathbf{X}|} \quad (\text{B.1})$$

Une surface contenue dans un espace en trois dimensions peut être paramétrée par deux variables indépendantes. Le vecteur  $\mathbf{X}$  définit alors la paramétrisation de l'interface en fonction de ces variables, notées  $u$  et  $v$ . La normale à une interface quelconque est donc le produit vectoriel des variations de la paramétrisation en fonction des variables.

Puisque notre problème est axisymétrique, il est adapté d'utiliser les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, x)$  pour paramétrer l'interface liquide-vapeur de notre bulle. La distance entre l'axe du cylindre et l'interface liquide vapeur est définie en fonction de la position  $x$  :  $r = h(x)$ . La paramétrisation suivante est donc adoptée :

$$\mathbf{X} = (h(x) \cos \theta, h(x) \sin \theta, x) \quad (\text{B.2})$$

On peut en déduire les vecteurs différenciés :

$$d_x \mathbf{X} = (h'(x) \cos(\theta), h'(x) \sin(\theta), 1) \quad (\text{B.3a})$$

$$d_\theta \mathbf{X} = (-h(x) \sin(\theta), h(x) \cos(\theta), 0) \quad (\text{B.3b})$$

Le produit vectoriel normalisé de ces deux derniers vecteurs définit le vecteur normal à l'interface liquide-vapeur, quel que soit le couple de variables  $(\theta, x)$  :

$$\mathbf{N} = \frac{(-\cos(\theta), -\sin(\theta), h'(x))}{(1 + h'(x)^2)^{1/2}} \quad (\text{B.4})$$

Tout vecteur tangent à l'interface est par définition orthogonal au vecteur normal, c'est-à-dire colinéaire aux deux vecteurs  $d_x \mathbf{X}$  et  $d_\theta \mathbf{X}$ , qui définissent alors les deux directions de courbure principales. La courbure locale de l'interface est donc la somme des valeurs propres associés à la décomposition de la variation du vecteur normal suivant les deux vecteurs  $d_x \mathbf{X}$  et  $d_\theta \mathbf{X}$ .

En suivant Do Carmo ([20], section 3-3), cette décomposition peut s'écrire :

$$\mathbf{S}_p = \mathbf{I}_p^{-1} \cdot \mathbf{II}_p \quad (\text{B.5})$$

Les matrices  $\mathbf{I}_p$  et  $\mathbf{II}_p$  sont les première et deuxième fondamentales associées à la paramétrisation  $\mathbf{X}$  et possèdent les définitions suivantes :

$$(\mathbf{I}_p)_{ij} = d_i \mathbf{X} \cdot d_j \mathbf{X} \quad (\text{B.6a})$$

$$(\mathbf{II}_p)_{ij} = \mathbf{N} \cdot d_{ij} \mathbf{X} \quad (\text{B.6b})$$

Ici  $d_i$  et  $d_j$  désignent les dérivées par rapport aux variables  $x$  ou  $\theta$  suivant leur position dans la matrice.  $d_{ij}$  représente une dérivée double.

$$d_{xx} \mathbf{X} = (h''(x) \cos(\theta), h''(x) \sin(\theta), 0) \quad (\text{B.7a})$$

$$d_{\theta\theta} \mathbf{X} = (-h(x) \cos(\theta), -h(x) \sin(\theta), 0) \quad (\text{B.7b})$$

$$d_{\theta x} \mathbf{X} = d_{x\theta} \mathbf{X} = (-h'(x) \sin(\theta), h'(x) \cos(\theta), 0) \quad (\text{B.7c})$$

Les première et deuxième fondamentales ont pour expressions :

$$\mathbf{I}_p = \begin{pmatrix} 1 + h'(x)^2 & 0 \\ 0 & h(x)^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.8a})$$

$$\mathbf{II}_p = \frac{1}{(1 + h'(x)^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} -h''(x) & 0 \\ 0 & h(x) \end{pmatrix} \quad (\text{B.8b})$$

---

La décomposition de la variation du vecteur normal sur la base  $(d_x \mathbf{X}, d_\theta \mathbf{X})$  a donc pour forme :

$$\mathbf{S}_p = \begin{pmatrix} -\frac{h''(x)}{(1+h'(x)^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h(x)(1+h'(x)^2)^{1/2}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Les valeurs propres de cette matrice sont faciles à trouver, la courbure locale de l'interface liquide-vapeur dans notre modèle peut donc s'écrire sous la forme :

$$c = \frac{1}{h(x)(1+h'(x)^2)^{1/2}} - \frac{h''(x)}{(1+h'(x)^2)^{3/2}} \quad (\text{B.10})$$

Cette expression est reproduite par l'équation (2.14).





## Annexe C

# Etude asymptotique de l'équation de lubrification

Considérons l'équation suivante :

$$-\frac{1}{3} d_x (h^3 d_{x^3} h) + d_x h = \frac{A}{B + C h} \quad (\text{C.1})$$

où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des constantes.

Supposons à présent que la fonction  $h$  peut s'écrire comme la somme d'une forme quadratique et d'un terme quelconque petit devant 1, noté  $\varepsilon$ , et cherchons à déterminer ce terme résiduel.

$$h(x) = a \frac{x^2}{2} + b x + c + \varepsilon(x) \quad (\text{C.2})$$

Cette expression est introduite dans (C.1) :

$$-\frac{1}{3} d_x \left( \left( a \frac{x^2}{2} + b x + c + \varepsilon \right)^3 d_{x^3} \varepsilon \right) + a x + b + d_x \varepsilon = \frac{A}{B + C \left( a \frac{x^2}{2} + b x + c + \varepsilon \right)} \quad (\text{C.3})$$

Quand  $x$  devient grand, le membre de droite devient très petit, et il est possible d'écrire :

$$-\frac{1}{3} \left( a \frac{x^2}{2} + b x + c + \varepsilon \right)^3 d_{x^3} \varepsilon + a \frac{x^2}{2} + b x + \varepsilon = E_1 \quad (\text{C.4})$$

où  $E_1$  est une constante. En considérant uniquement les termes prépondérants de cette précédente équation, il ne reste à résoudre que l'équation suivante :

$$\frac{a}{24}x^6 d_{x^3}\varepsilon + a \frac{x^2}{2} = E_1 \quad (\text{C.5})$$

qui admet comme solution :

$$\varepsilon(x) = -\frac{2 E_1}{5 a x^3} - \frac{2}{x} + C_1 + C_2 x + C_3 x^2 \quad (\text{C.6})$$

Pour que ce terme soit petit devant 1, il faut écrire :  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ . Le paramètre d'interface  $h$  à l'ordre principal dans la région du ménisque peut alors s'écrire, pour des  $x$  grands :

$$h(x) = a \frac{x^2}{2} + b x + c + O\left(\frac{1}{x}\right) \quad (\text{C.7})$$

Le paramètre d'interface associé à la zone de transition à l'ordre principal peut donc être considéré comme quadratique quand  $x \rightarrow \pm\infty$ .

# Annexe D

## Résolution de l'équation de Laplace

### D.1 Présentation du problème

Dans l'optique d'obtenir le champ de température  $T_1^{[00]}$  à l'ordre principal dans la région du ménisque, il faut résoudre l'équation de Laplace :

$$\Delta T_1^{[00]} = 0 \quad (\text{D.1})$$

Cette équation en elle-même n'est pas difficile à résoudre, du moins depuis les travaux de physiciens et mathématiciens comme Bessel, Legendre, Gegenbauer, etc., qui ont formalisé les fonctions solutions de cette équation dans les systèmes de coordonnées cylindrique ou sphérique. La difficulté provient ici du type de conditions aux limites qui doivent être considérées, ainsi que de la forme géométrique des frontières. La figure D.1 récapitulant le problème à traiter présente en effet une condition cylindrique appliquée à la paroi

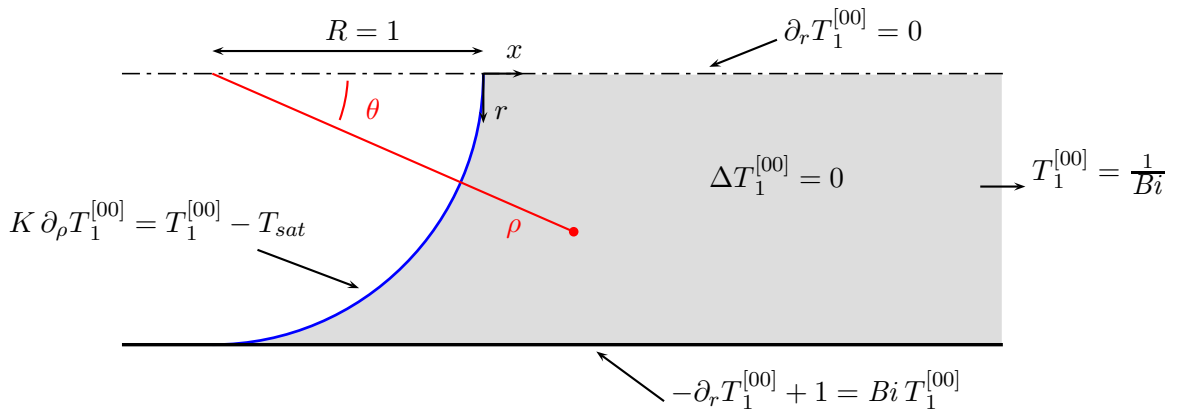


Figure D.1: Problème complet associé au champ de température  $T_1^{[00]}$ .

du capillaire, ainsi qu'une condition sphérique à l'interface liquide-vapeur.

Ce genre de problème combinant des systèmes de coordonnées différents n'est pas nouveau, en particulier en hydrodynamique. L'ouvrage classique de Happel et Brenner [34], portant sur l'hydrodynamique des écoulements à faible nombre de Reynolds, traite en particulier du mouvement et des interactions de particules solides plongées dans un écoulement fluide.

Ces auteurs utilisent pour ce genre de problème une méthode de résolution appelée méthode des réflexions (voir par exemple [11] ou [27]). Dans cette méthode, le champ de température recherché est écrit comme une somme de champs particuliers. Le premier de ces champs ne satisfait que la condition cylindrique au mur. Le deuxième champ satisfait uniquement une condition sphérique sur la paroi de la particule plongée dans l'écoulement. Cette condition sphérique annule la contribution du premier champ sur la paroi de la particule solide. La somme de ces deux champs particuliers satisfait donc la condition sphérique, mais pas la condition cylindrique à cause de la contribution du deuxième champ particulier. Cette contribution est donc annulée par un troisième champ particulier, et la méthode résout ainsi alternativement des problèmes cylindriques et sphériques s'annulant respectivement aux frontières du domaine de résolution. Cette méthode converge de manière satisfaisante très rapidement, mais sa puissance reste confinée à des systèmes relativement simples, c'est-à-dire en fait à des conditions hydrodynamiques de non-pénétration et de non-glissement du fluide sur la paroi de la particule, et devient fastidieuse et imprécise pour la prise en compte de conditions mixtes de porosité comme celles qui nous intéressent ici.

Dans un rapport publié en 1958, Haberman et Sayre [30] n'y sont pas allés par quatre chemins : après avoir écrit les deux solutions cylindrique et sphérique d'un écoulement rampant, ils ont appliqué à chacune la condition aux limites correspondante (condition à la paroi du cylindre pour la solution cylindrique, condition à la paroi de la particule pour la solution sphérique). Ils ont ensuite réussi à relier ces deux expressions pour déterminer les constantes d'intégration restantes, ce qui n'est pas un mince affaire. Malheureusement ces résultats ne sont valables que pour des rayons de particules strictement inférieurs au rayon du cylindre. Pour des rapports de rayon supérieurs à 0.6, les séries infinies décrivant l'écoulement divergent. Il est donc impossible de suivre Haberman et Sayre pour obtenir le champ de température du bouchon de liquide à l'avant d'une bulle de vapeur en déplacement.

La méthode des singularités suppose, comme son nom l'indique, la présence d'une singularité au centre de la particule sphérique, générant une perturbation de la solution générale cylindrique. Cette méthode se rapproche en partie de celle utilisée par Haberman et Sayre [30], à la différence qu'au lieu de travailler avec deux solutions (cylindrique et sphérique) séparées, que l'on cherche à « concilier », ces deux solutions sont combinées dès le début, et cette combinaison satisfait toutes les conditions aux limites. Cette technique permet de s'affranchir de la restriction portant sur le rapport des rayons sphérique et cylindrique. Il suffit dès lors d'adapter la forme de la singularité pour obtenir la satisfaction

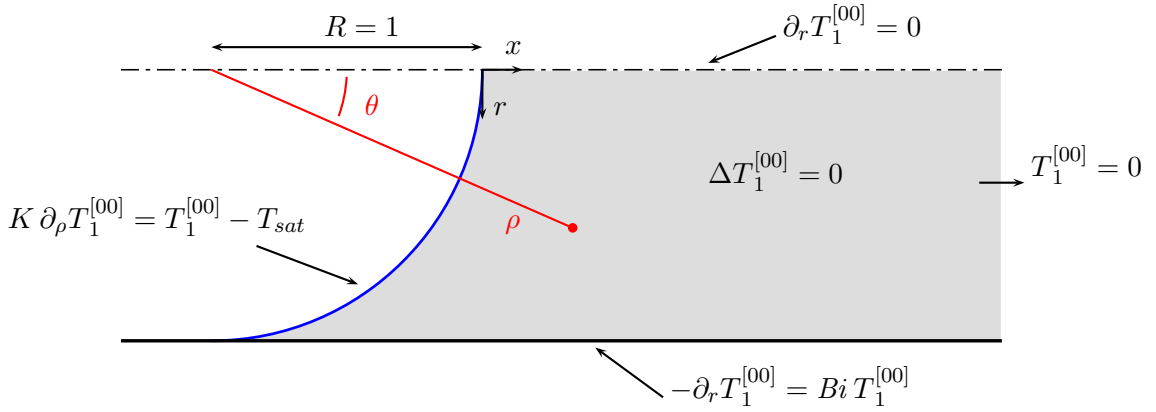


Figure D.2: Problème complet associé au champ de température  $\tilde{T}_{sat}$ .

de la condition aux limites sphériques qui nous intéresse. Cette technique a été utilisé d'abord par Payne et Pell [64], puis par Gluckman *et al.* [24, 25]. Les calculs présentés dans la section D.3 sont largement inspirés de l'article de Leichtberg *et al.* [46], en adaptant la démarche à notre problème particulier.

## D.2 Valeurs propres discrètes

La méthode de Haberman et Sayre [30], ainsi que la méthode des singularités, supposent un espace continu des valeurs propres associées à la solution cylindrique de l'équation de Laplace, ce qui évite les problèmes de convergence des solutions pour des domaines de résolution possédant une géométrie compliquée.

Cependant, le problème thermique à l'ordre principal dans la région du ménisque reste suffisamment simple pour qu'une résolution dans le repère cylindrique, utilisant une définition discrète des valeurs propres du problème permette d'obtenir une solution convergente.

La première étape du calcul est la réécriture du problème. La figure D.1 présente en effet trois conditions aux limites non homogènes, ce qui rend cette formulation impossible à résoudre. Le changement de variable suivant est posé :

$$T_1^{[00]} = \tilde{T} + \frac{1}{Bi} \quad (D.2)$$

Le problème devient alors celui présenté par la figure D.2, où seule la condition sphérique à l'interface liquide-vapeur est non homogène. Cette inhomogénéité est définie par :

$$\tilde{T}_{sat} = T_{sat} - \frac{1}{Bi} \quad (D.3)$$

Les tildes marquant le champ de température transformé sont immédiatement laissés de coté pour une meilleure lisibilité. L'opérateur laplacien a pour expression en coordonnées cylindriques axisymétriques :

$$\Delta = \partial_{r^2} + \frac{1}{r} \partial_r + \partial_{x^2} \quad (\text{D.4})$$

Pour séparer les variables, on pose :

$$T(r, x) = f(r) g(x) \quad (\text{D.5})$$

L'équation de Laplace peut alors être écrite comme suit :

$$\frac{f''}{f} + \frac{1}{r} \frac{f'}{f} = -\frac{g''}{g} = -\lambda^2 \quad (\text{D.6})$$

Cette expression génère les deux équations suivantes :

$$f'' + \frac{1}{r} f' + \lambda^2 f = 0 \quad (\text{D.7a})$$

$$g'' - \lambda^2 g = 0 \quad (\text{D.7b})$$

qui admettent les solutions :

$$f(r) = A_\lambda J_0(\lambda r) + B_\lambda Y_0(\lambda r) \quad (\text{D.8a})$$

$$g(x) = C_\lambda e^{-\lambda(x+1)} + D_\lambda e^{\lambda(x+1)} \quad (\text{D.8b})$$

où A, B, C, D sont des constantes d'intégration.  $J_0$  et  $Y_0$  sont les fonctions de Bessel d'ordre 0 de première et deuxième espèces, respectivement. Un changement de repère a été effectué pour ramener l'origine du repère cylindrique de l'extrême avant du ménisque au centre de la sphère formée par ce même ménisque, ce qui revient à remplacer l'abscisse  $x$  par une abscisse modifiée  $(x + 1)$ .

La fonction de Bessel de deuxième espèce diverge pour un rayon nul, et ce quel que soit son ordre, ce qui oblige, pour assurer la condition de symétrie au centre du capillaire, à imposer la constante  $B_\lambda$  nulle quelle que soit la valeur de  $\lambda$ . De même, pour éviter que la solution ne diverge quand l'abscisse  $x$  devient grande, il est nécessaire de fixer la constante  $D_\lambda$  nulle.

La solution de l'équation de Laplace dans un système de coordonnées cylindriques axisymétriques s'annulant pour des  $x$  grands est donc :

$$T(r, x) = \sum_{i=1}^{+\infty} A_i J_0(\lambda_i r) e^{\lambda_i(x+1)} \quad (\text{D.9})$$

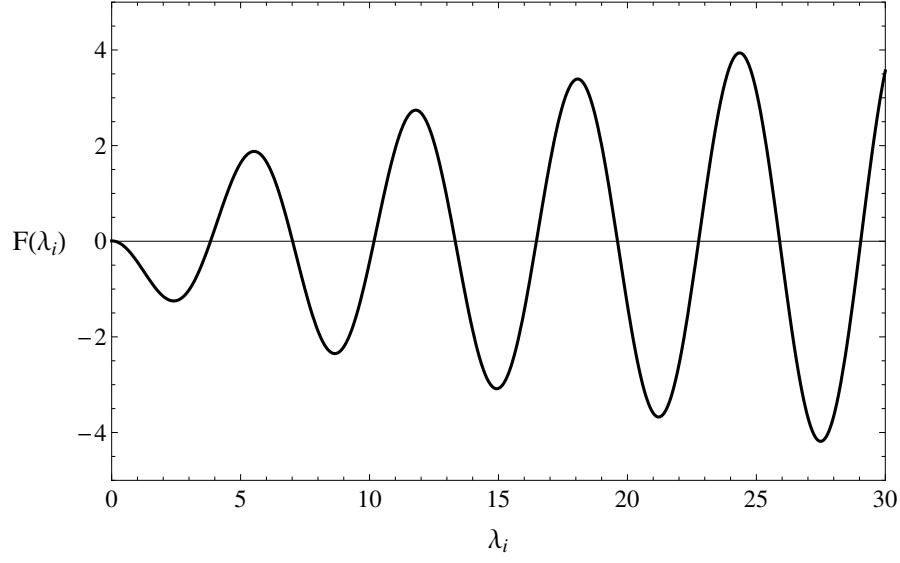


Figure D.3: Fonction  $F$  pour la définition des valeurs propres satisfaisant le bilan de flux de chaleur à la paroi solide.

Les valeurs propres discrètes  $\lambda_i$  sont choisies pour que cette solution satisfasse le bilan de flux à la paroi solide :

$$F(\lambda_i) = -\lambda_i J_1(\lambda_i) + Bi J_0(\lambda_i) = 0 \quad (\text{D.10})$$

La fonction  $F$  est représentée dans la figure D.3 pour montrer qu'elle possède bien une infinité de racines, puisque les fonctions de Bessel de première espèce sont oscillantes quel que soit leur ordre.

La fonction (D.9) écrite dans la base sphérique  $(\rho, \theta)$ , est appliquée au bilan de flux sphérique à l'interface liquide-vapeur, ce qui permet d'écrire :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} A_i e^{-\lambda_i \cos(\theta)} ((1 + \lambda_i K \cos(\theta)) J_0(\lambda_i \sin(\theta)) + \lambda_i K \sin(\theta) J_1(\lambda_i \sin(\theta))) = \tilde{T}_{sat} \quad (\text{D.11})$$

Pour déterminer un nombre  $m$  quelconque de coefficients  $A_i$ , il faut résoudre le système d'équations constitué de l'évaluation de l'équation (D.11) pour  $m$  valeurs différentes de l'angle  $\theta$  compris entre 0 et  $\pi/2$ .



## D.3 Valeurs propres continues

### D.3.1 Équation de Laplace en coordonnées cylindriques

Pour des conditions à l'interface liquide-vapeur plus difficiles à prendre en compte, il est indispensable de considérer une solution plus générale à l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques. Ici, toutes les valeurs de  $\lambda$  pourront être solution. La solution générale de l'équation de Laplace en coordonnée cylindrique n'est donc plus une somme infinie sur l'ensemble des valeurs propres discrètes solution d'une condition aux limites, mais une intégrale impropre sur le domaine continu des valeurs propres  $\lambda$ .

Pour satisfaire la condition d'annulation pour des  $x$  grands, il est cependant indispensable de modifier la séparation des variables effectuée dans la section précédente. Nous écrivons donc :

$$\frac{f''}{f} + \frac{1}{r} \frac{f'}{f} = -\frac{g''}{g} = \lambda^2 \quad (\text{D.12})$$

Les solutions radiale et axiale sont alors :

$$f(r) = A_\lambda I_0(\lambda r) + B_\lambda K_0(\lambda r) \quad (\text{D.13a})$$

$$g(x) = C_\lambda \cos(-\lambda(x+1)) + D_\lambda \sin(\lambda(x+1)) \quad (\text{D.13b})$$

Les fonctions  $I_0$  et  $K_0$  sont les fonctions de Bessel modifiées d'ordre 0 de première et deuxième espèces, respectivement. La fonction  $K_0$ , tout comme la fonction  $Y_0$ , diverge pour  $r = 0$ , imposant de considérer la constante  $B_\lambda$  nulle quelle que soit la valeur propre  $\lambda$ . De plus, puisque nous nous intéressons uniquement aux abscisses  $x$  supérieures à  $-1$ , rien ne nous empêche de supposer que le champ de température que nous cherchons à calculer est symétrique par rapport au plan  $x = -1$ , ce qui impose la constante  $D_\lambda$  nulle elle aussi quel que soit  $\lambda$ , à cause de l'impairité de la fonction sinus. Nous obtenons alors la solution suivante à l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques :

$$T_c(r, x) = \int_0^{+\infty} A(\lambda) I_0(\lambda r) \cos(\lambda(x+1)) d\lambda \quad (\text{D.14})$$

Cette expression du champ de température vérifie les conditions de symétrie au centre du tube capillaire et s'annule quand  $x$  tend vers l'infini grâce à la fonction oscillante cosinus.

---

### D.3.2 Équation de Laplace en coordonnées sphériques

L'opérateur Laplacien a pour expression en coordonnées sphériques axisymétriques :

$$\Delta = \rho^2 \partial_{\rho^2} + 2\rho \partial_{\rho} + \partial_{\theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \partial_{\theta} \quad (\text{D.15})$$

Le déroulement du raisonnement est identique à celui de la section précédente. On pose :

$$T_s(\rho, \theta) = f(\rho) g(\theta) \quad (\text{D.16})$$

Il s'ensuit le système d'équations différentielles suivant :

$$\rho^2 \frac{f''}{f} + 2\rho \frac{f'}{f} = -\frac{g''}{g} - \frac{1}{\tan \theta} \frac{g'}{g} = -\lambda^2 \quad (\text{D.17})$$

La solution de ces deux équations différentielles impose de définir un paramètre entier :

$$n = \frac{1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 - 4\lambda^2} \right) \quad (\text{D.18})$$

La solution du système (D.17) peut alors s'écrire :

$$f(\rho) = \alpha_n \rho^{-1-n} + \beta_n \rho^n \quad (\text{D.19a})$$

$$g(\theta) = \gamma_n P_n(\cos \theta) + \delta_n Q_n(\cos \theta) \quad (\text{D.19b})$$

Les paramètres  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ ,  $\gamma_n$  et  $\delta_n$  sont des constantes d'intégration dépendantes du paramètre  $n$ . Les fonctions  $P_n$  et  $Q_n$  sont les polynômes de Legendre de première et seconde espèces, respectivement. Au centre du tube capillaire, c'est-à-dire quand l'angle  $\theta$  est nul et son cosinus est égal à 1, le polynôme de Legendre de deuxième espèce tend vers l'infini, ce qui impose de prendre la constante  $D_n$  nulle quel que soit l'entier  $n$ . De plus, pour que la solution ne diverge pas en s'éloignant du ménisque, la constante  $B_n$  est elle aussi prise égale à zéro quel que soit l'entier  $n$ . La solution de l'équation de Laplace écrite en coordonnées sphériques axisymétriques s'annulant pour des rayons grands s'écrit :

$$T_s(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \rho^{-1-n} P_n(\cos \theta) \quad (\text{D.20})$$

### D.3.3 Solution générale et condition à la paroi

La solution suivante à l'équation de Laplace est considérée :

$$T = T_c + T_s = \int_0^{+\infty} A(\lambda) I_0(\lambda r) \cos(\lambda(x+1)) d\lambda + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \rho^{-1-n} P_n(\cos \theta) \quad (\text{D.21})$$

Cette fonction, en plus de vérifier l'équation de Laplace, vérifie aussi la condition de symétrie au centre du tube capillaire, ainsi que la condition nulle loin du ménisque. Elle est à présent appliquée au bilan de flux à la paroi solide du capillaire qui est rappelé ici :

$$\partial_r T + Bi T = 0 \quad \text{quand} \quad r = 1 \quad (\text{D.22})$$

Cette condition peut s'écrire comme suit :

$$\int_0^{+\infty} A(\lambda) F(\lambda) \cos(\lambda(x+1)) d\lambda = - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n G_n(x) \quad (\text{D.23})$$

$$F(\lambda) = \lambda I_1(\lambda) + Bi I_0(\lambda) \quad (\text{D.24})$$

$$G_n(x) = Bi \rho_1^{-1-n} P_n(\theta_1) - (1+n) \rho_1^{-1-n} P_n(\theta_1) + (1+n)(1+x) \rho_1^{-2-n} P_{n+1}(\theta_1) \quad (\text{D.25})$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{avec} \quad \rho_1 = \sqrt{1+(x+1)^2} \\ \text{et} \quad \theta_1 = \frac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}} \end{array} \right\} \quad (\text{D.26})$$

Il est possible de voir le terme de gauche de l'équation (D.23) comme la transformée de Fourier dans l'espace réel de la fonction  $A(\lambda) F(\lambda)$ . En prenant la transformée de Fourier inverse de cette équation, il est alors possible d'exprimer la fonction  $A(\lambda)$  en fonction des paramètres  $\alpha_n$  :

$$A(\lambda) = -\frac{2}{\pi F(\lambda)} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \int_{-1}^{+\infty} G_n(x) \cos(\lambda(x+1)) dx \quad (\text{D.27})$$

Le champ de température dans le bouchon de liquide devant le ménisque est donc de la forme :

---


$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \rho^{-1-n} P_n(\cos \theta) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \int_0^{+\infty} \frac{I_0(\lambda r) \cos(\lambda(x+1))}{F(\lambda)} \int_{-1}^{+\infty} G_n(x) \cos(\lambda(x+1)) dx d\lambda \quad (\text{D.28})$$

Cette expression est alors introduite dans le bilan de flux de chaleur à l'interface liquide-vapeur dans le ménisque reculant, et la même procédure que dans la section D.2 est répétée pour déterminer les coefficients  $\alpha_n$ . L'interface liquide-vapeur est discrétisée suivant  $\theta$  pour obtenir  $m$  équations linéairement indépendantes permettant de calculer les  $m$  premiers coefficients de la série solution, qui sera donc impérativement tronquée.

Pour que cette troncature ne génère pas d'erreurs trop importantes sur le champ de température dans le bouchon de liquide, il est indispensable de prendre un ordre de troncature  $m$  assez élevé. La double intégrale infinie présente dans l'expression du champ de température, qui se retrouve aussi dans l'expression des coefficients de la matrice permettant le calcul des coefficients  $\alpha_n$ , devront elle aussi être tronquées pour permettre leur évaluation numérique, puisqu'elles ne possèdent pas de solution analytique évidente. Malheureusement, de par la nature hautement oscillante des intégrandes, la troncature de ces intégrales infinies devra être faite suffisamment loin, générant des évaluations numériques dont la durée devient rapidement rédhibitoire. En effet, le calcul séquentiel permettant l'obtention du champ de température  $T_1^{[00]}$ , en vue de comparer les résultats des méthodes de résolution utilisant des définitions discrètes et continues de l'espace des valeurs propres, prend plusieurs jours.



## Annexe E

### Modèles suivant l'ordre de perturbation

## E.1 Région 2 : Transition avant

### E.1.1 Ordre principal

Equations de conservation :

$$\partial_x U_2^{[00]} + \partial_r V_2^{[00]} = 0 \quad (\text{E.1a})$$

$$-\partial_x P_2^{[00]} + \partial_{r^2} U_2^{[00]} = 0 \quad (\text{E.1b})$$

$$-\partial_r P_2^{[00]} = 0 \quad (\text{E.1c})$$

$$\partial_{r^2} T_2^{[00]} = 0 \quad (\text{E.1d})$$

Conditions au mur :

$$U_2^{[00]}(0, x) = -1 \quad ; \quad V_2^{[00]}(0, x) = 0 \quad (\text{E.2a})$$

$$\partial_r T_2^{[00]}|_0 + 1 = Bi_m T_2^{[00]}(0, x) \quad (\text{E.2b})$$

Conditions à l'interface :

Toutes les grandeurs sont évaluées en  $r = h_2^{[00]}$

$$\Phi_2^{[00]} = d_{x^2} h_2^{[00]} \quad (\text{E.3a})$$

$$\partial_r U_2^{[00]} = 0 \quad (\text{E.3b})$$

$$-\partial_r T_2^{[00]} = \Gamma^{lg}_2^{[00]} \quad (\text{E.3c})$$

Bilan de masse :

$$\Gamma_2^{[00]} = \int_0^{h_2^{[00]}} U_2^{[00]} dr \quad (\text{E.4a})$$

$$-d_x \Gamma_2^{[00]} = E_{tr} \Gamma^{lg}_2^{[00]} \quad (\text{E.4b})$$

Loi constitutive d'évaporation :

$$K \Gamma^{lg}_2^{[00]} = T_2^{[00]} - T_{sat,2} \quad \text{en} \quad r_2 = h_2^{[00]} \quad (\text{E.5})$$

---

### E.1.2 Ordre 10

Equations de conservation :

$$\partial_x U_2^{[10]} + \partial_r V_2^{[10]} = 0 \quad (\text{E.6a})$$

$$-\partial_x P_2^{[10]} + \partial_{r^2} U_2^{[10]} = 0 \quad (\text{E.6b})$$

$$-\partial_r P_2^{[10]} = 0 \quad (\text{E.6c})$$

$$\partial_{r^2} T_2^{[10]} = 0 \quad (\text{E.6d})$$

Conditions au mur :

$$U_2^{[10]}(0, x) = 0 \quad ; \quad V_2^{[10]}(0, x) = 0 \quad (\text{E.7a})$$

$$\partial_r T_2^{[10]}|_{0=} Bi_m T_2^{[10]}(0, x) \quad (\text{E.7b})$$

Conditions à l'interface :

Toutes les grandeurs sont évaluées en  $r = h_2^{[00]}$

$$\Phi_2^{[10]} = d_{x^2} h_2^{[10]} \quad (\text{E.8a})$$

$$\partial_r U_2^{[10]} + h_2^{[10]} \partial_{r^2} U_2^{[00]} = 0 \quad (\text{E.8b})$$

$$-\partial_r T_2^{[10]} = \Gamma^{lg}_2^{[10]} \quad (\text{E.8c})$$

Bilan de masse :

$$\Gamma_2^{[10]} = \int_0^{h_2^{[00]}} U_2^{[10]} dr - h_2^{[10]} U_2^{[00]}(h_2^{[00]}, x) \quad (\text{E.9a})$$

$$-d_x \Gamma_2^{[10]} = E_{tr} \Gamma^{lg}_2^{[10]} \quad (\text{E.9b})$$

Loi constitutive d'évaporation :

$$K \Gamma^{lg}_2^{[10]} = T_2^{[10]} - h_2^{[10]} \partial_r T_2^{[00]} \quad \text{en} \quad r_2 = h_2^{[00]} \quad (\text{E.10})$$



### E.1.3 Ordre 01

Equations de conservation :

$$\partial_x U_2^{[01]} + \partial_r V_2^{[01]} = 0 \quad (\text{E.11a})$$

$$-\partial_x P_2^{[01]} + \partial_{r^2} U_2^{[01]} = 0 \quad (\text{E.11b})$$

$$-\partial_r P_2^{[01]} = 0 \quad (\text{E.11c})$$

$$\partial_{r^2} T_2^{[01]} = 0 \quad (\text{E.11d})$$

Conditions au mur :

$$U_2^{[01]}(0, x) = 0 \quad ; \quad V_2^{[01]}(0, x) = 0 \quad (\text{E.12a})$$

$$\partial_r T_2^{[01]}|_{0=} = Bi_m T_2^{[01]}(0, x) \quad (\text{E.12b})$$

Conditions à l'interface :

Toutes les grandeurs sont évaluées en  $r = h_2^{[00]}$

$$\Phi_2^{[01]} = d_{x^2} h_2^{[01]} \quad (\text{E.13a})$$

$$\partial_r U_2^{[01]} + h_2^{[01]} \partial_{r^2} U_2^{[00]} = 0 \quad (\text{E.13b})$$

$$-\partial_r T_2^{[01]} = \Gamma^{lg}_2^{[01]} \quad (\text{E.13c})$$

Bilan de masse :

$$\Gamma_2^{[01]} = \int_0^{h_2^{[00]}} U_2^{[01]} dr - h_2^{[01]} U_2^{[00]}(h_2^{[00]}, x) \quad (\text{E.14a})$$

$$-d_x \Gamma_2^{[01]} = E_{tr} \Gamma^{lg}_2^{[01]} \quad (\text{E.14b})$$

Loi constitutive d'évaporation :

$$K \Gamma^{lg}_2^{[01]} = T_2^{[01]} - h_2^{[01]} \partial_r T_2^{[00]} \quad \text{en} \quad r_2 = h_2^{[00]} \quad (\text{E.15})$$

---

### E.1.4 Ordre 11

Les simplifications dues à la forme des fonctions aux ordres inférieurs sont prises en compte. Seuls les termes non nuls sont présentés ici.

**Equations de conservation :**

$$\partial_x U_2^{[11]} + \partial_r V_2^{[11]} = 0 \quad (\text{E.16a})$$

$$-\partial_x P_2^{[11]} + \partial_{r^2} U_2^{[11]} = 0 \quad (\text{E.16b})$$

$$-\partial_r P_2^{[11]} = 0 \quad (\text{E.16c})$$

$$\partial_{r^2} T_2^{[11]} = 0 \quad (\text{E.16d})$$

**Conditions au mur :**

$$U_2^{[11]}(0, x) = 0 \quad ; \quad V_2^{[11]}(0, x) = 0 \quad (\text{E.17a})$$

$$\partial_r T_2^{[11]}|_{0=} = Bi_m T_2^{[11]}(0, x) \quad (\text{E.17b})$$

**Conditions à l'interface :**

Toutes les grandeurs sont évaluées en  $r = h_2^{[00]}$

$$\Phi_2^{[11]} = d_x h_2^{[11]} \quad (\text{E.18a})$$

$$\partial_r U_2^{[11]} + h_2^{[11]} \partial_{r^2} U_2^{[00]} = 0 \quad (\text{E.18b})$$

$$-\partial_r T_2^{[11]} = \Gamma^{lg}_2^{[11]} \quad (\text{E.18c})$$

**Bilan de masse :**

$$\Gamma_2^{[11]} = \int_0^{h_2^{[00]}} U_2^{[11]} dr - h_2^{[11]} U_2^{[00]}(h_2^{[00]}, x) \quad (\text{E.19a})$$

$$-d_x \Gamma_2^{[11]} = E_{tr} \Gamma^{lg}_2^{[11]} \quad (\text{E.19b})$$

**Loi constitutive d'évaporation :**

$$K \Gamma^{lg}_2^{[11]} = T_2^{[11]} - h_2^{[11]} \partial_r T_2^{[00]} \quad \text{en} \quad r_2 = h_2^{[00]} \quad (\text{E.20})$$

### E.1.5 Ordre 20

Les simplifications dues à la forme des fonctions aux ordres inférieurs sont prises en compte. Seuls les termes non nuls sont présentés ici.

**Equations de conservation :**

$$\partial_x U_2^{[20]} + \partial_r V_2^{[20]} - 2V_2^{[00]} = 0 \quad (\text{E.21a})$$

$$-\partial_x P_2^{[20]} + \partial_{r^2} U_2^{[20]} + 2\partial_{x^2} U_2^{[00]} - 2\partial_r U_2^{[00]} = 0 \quad (\text{E.21b})$$

$$-\partial_r P_2^{[20]} + 2\partial_{r^2} V_2^{[00]} = 0 \quad (\text{E.21c})$$

$$\partial_{r^2} T_2^{[20]} + 2\partial_{x^2} T_2^{[00]} - 2\partial_r T_2^{[00]} = 0 \quad (\text{E.21d})$$

**Conditions au mur :**

$$U_2^{[20]}(0, x) = 0 \quad ; \quad V_2^{[20]}(0, x) = 0 \quad (\text{E.22a})$$

$$\partial_r T_2^{[20]}|_{0=} Bi_m T_2^{[20]}(0, x) \quad (\text{E.22b})$$

**Conditions à l'interface :**

Toutes les grandeurs sont évaluées en  $r = h_2^{[00]}$

$$\begin{aligned} \Phi_2^{[20]} + 4d_x h_2^{[00]} \partial_r U_2^{[00]} + 4\partial_r V_2^{[00]} = \\ d_{x^2} h_2^{[20]} + h_2^{[20]} d_{x^3} h_2^{[00]} + 2h_2^{[00]} + 2h_2^{[10]} d_{x^3} h_2^{[10]} + h_2^{[10]^2} d_{x^4} h_2^{[00]} - d_x h_2^{[00]^2} \left( 1 + 3d_{x^2} h_2^{[00]} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.23a})$$

$$\begin{aligned} \partial_r U_2^{[20]} + h_2^{[20]} \partial_{r^2} U_2^{[00]} + 2h_2^{[10]} d_{x^2} U_2^{[10]} + h_2^{[10]^2} d_{x^3} U_2^{[00]} \\ + 4d_x h_2^{[00]} \left( \partial_x U_2^{[00]} + \partial_r V_2^{[00]} \right) - 2\partial_x V_2^{[00]} - 2d_x h_2^{[00]^2} \partial_r U_2^{[00]} = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.23b})$$

$$2d_x h_2^{[00]} \partial_x T_2^{[00]} - \partial_r T_2^{[20]} - h_2^{[20]} \partial_{r^2} T_2^{[00]} = \Gamma^{lg}_{2^{[20]}} + d_x h_2^{[00]^2} \Gamma^{lg}_{2^{[00]}} \quad (\text{E.23c})$$

**Bilan de masse :**

$$\Gamma_2^{[20]} = \int_0^{h_2^{[00]}} \left( U_2^{[20]} - 2r U_2^{[00]} \right) dr + h_2^{[20]} U_2^{[00]}|_{h_2^{[00]}} - 2h_2^{[10]} U_2^{[10]} - h_2^{[10]^2} d_x U_2^{[00]} \quad (\text{E.24a})$$

$$-d_x \Gamma_2^{[20]} = E_{tr} \Gamma^{lg}_{2^{[20]}} - 2E_{tr} h_2^{[00]} \Gamma^{lg}_{2^{[00]}} \quad (\text{E.24b})$$

---

**Loi constitutive d'évaporation :**

$$K \Gamma_2^{lg[20]} = T_2^{[20]} - h_2^{[20]} \partial_r T_2^{[00]} \quad \text{en} \quad r_2 = h_2^{[00]} \quad (\text{E.25})$$

### E.1.6 Ordre 21

Les simplifications dues à la forme des fonctions aux ordres inférieurs sont prises en compte. Seuls les termes non nuls sont présentés ici.

**Equations de conservation :**

$$\partial_x U_2^{[21]} + \partial_r V_2^{[21]} = 0 \quad (\text{E.26a})$$

$$-\partial_x P_2^{[21]} + \partial_{r^2} U_2^{[21]} = 0 \quad (\text{E.26b})$$

$$-\partial_r P_2^{[21]} = 0 \quad (\text{E.26c})$$

$$\partial_{r^2} T_2^{[21]} = 0 \quad (\text{E.26d})$$

**Conditions au mur :**

$$U_2^{[21]}(0, x) = 0 \quad ; \quad V_2^{[21]}(0, x) = 0 \quad (\text{E.27a})$$

$$-\partial_r T_2^{[21]}|_0 = Bi_m T_2^{[21]}(0, x) \quad (\text{E.27b})$$

**Conditions à l'interface :**

Toutes les grandeurs sont évaluées en  $r = h_2^{[00]}$

$$\Phi_2^{[21]} = d_{x^2} h_2^{[21]} \quad (\text{E.28a})$$

$$\partial_r U_2^{[21]} + h_2^{[21]} \partial_{r^2} U_2^{[00]} = 0 \quad (\text{E.28b})$$

$$-\partial_r T_2^{[21]} = \Gamma^{lg}_2^{[21]} \quad (\text{E.28c})$$

**Bilan de masse :**

$$\Gamma_2^{[21]} = \int_0^{h_2^{[00]}} U_2^{[21]} dr + h_2^{[21]} U_2^{[00]}|_{h_2^{[00]}} \quad (\text{E.29a})$$

$$-d_x \Gamma_2^{[21]} = E_{tr} \Gamma^{lg}_2^{[21]} \quad (\text{E.29b})$$

**Loi constitutive d'évaporation :**

$$K \Gamma^{lg}_2^{[21]} = T_2^{[21]} - h_2^{[21]} \partial_r T_2^{[00]} \quad \text{en} \quad r_2 = h_2^{[00]} \quad (\text{E.30})$$

---

## E.2 Région 3 : Film de liquide

### E.2.1 Ordre principal

Equations de conservation :

$$\partial_x U_3^{[00]} + \partial_r V_3^{[00]} = 0 \quad (\text{E.31a})$$

$$\partial_{r^2} U_3^{[00]} = 0 \quad (\text{E.31b})$$

$$-\partial_r P_3^{[00]} = 0 \quad (\text{E.31c})$$

$$\partial_{r^2} T_3^{[00]} = 0 \quad (\text{E.31d})$$

Conditions au mur :

$$U_3^{[00]}(0, x) = -1 \quad ; \quad V_3^{[00]}(0, x) = 0 \quad (\text{E.32a})$$

$$\partial_r T_3^{[00]}|_0 + 1 = Bi_m T_3^{[00]}(0, x) \quad (\text{E.32b})$$

Conditions à l'interface :

Toutes les grandeurs sont évaluées en  $r = h_3^{[00]}$

$$\Phi_3^{[00]} = 0 \quad (\text{E.33a})$$

$$\partial_r U_3^{[00]} = 0 \quad (\text{E.33b})$$

$$-\partial_r T_3^{[00]} = \Gamma^{lg}_3^{[00]} \quad (\text{E.33c})$$

Bilan de masse :

$$\Gamma_3^{[00]} = \int_0^{h_3^{[00]}} U_3^{[00]} dr \quad (\text{E.34a})$$

$$-d_x \Gamma_3^{[00]} = E_{tr} \Gamma^{lg}_3^{[00]} \quad (\text{E.34b})$$

Loi constitutive d'évaporation :

$$K \Gamma^{lg}_3^{[00]} = T_3^{[00]} - T_{sat,3} \quad \text{en} \quad r_3 = h_3^{[00]} \quad (\text{E.35})$$

## E.2.2 Ordre 10

Equations de conservation :

$$\partial_x U_3^{[10]} + \partial_r V_3^{[10]} = 0 \quad (\text{E.36a})$$

$$-\partial_x P_3^{[00]} + \partial_{r^2} U_3^{[10]} = 0 \quad (\text{E.36b})$$

$$-\partial_r P_3^{[10]} = 0 \quad (\text{E.36c})$$

$$\partial_{r^2} T_3^{[10]} = 0 \quad (\text{E.36d})$$

Conditions au mur :

$$U_3^{[10]}(0, x) = 0 \quad ; \quad V_3^{[10]}(0, x) = 0 \quad (\text{E.37a})$$

$$\partial_r T_3^{[10]}|_{0=} = Bi_m T_3^{[10]}(0, x) \quad (\text{E.37b})$$

Conditions à l'interface :

Toutes les grandeurs sont évaluées en  $r = h_3^{[00]}$

$$\Phi_3^{[10]} = 0 \quad (\text{E.38a})$$

$$\partial_r U_3^{[10]} = 0 \quad (\text{E.38b})$$

$$-\partial_r T_3^{[10]} = \Gamma^{lg}_3^{[10]} \quad (\text{E.38c})$$

Bilan de masse :

$$\Gamma_3^{[10]} = \int_0^{h_3^{[00]}} U_3^{[10]} dr - h_3^{[10]} U_3^{[00]}(h_3^{[00]}, x) \quad (\text{E.39a})$$

$$-d_x \Gamma_3^{[10]} = E_{tr} \Gamma^{lg}_3^{[10]} \quad (\text{E.39b})$$

Loi constitutive d'évaporation :

$$K \Gamma^{lg}_3^{[10]} = T_3^{[10]} - h_3^{[10]} \partial_r T_3^{[00]} \quad \text{en} \quad r_3 = h_3^{[00]} \quad (\text{E.40})$$

---

### E.2.3 Ordre 01

Equations de conservation :

$$\partial_x U_3^{[01]} + \partial_r V_3^{[01]} = 0 \quad (\text{E.41a})$$

$$\partial_{r^2} U_3^{[01]} = 0 \quad (\text{E.41b})$$

$$-\partial_r P_3^{[01]} = 0 \quad (\text{E.41c})$$

$$\partial_{r^2} T_3^{[01]} = 0 \quad (\text{E.41d})$$

Conditions au mur :

$$U_3^{[01]}(0, x) = 0 \quad ; \quad V_3^{[01]}(0, x) = 0 \quad (\text{E.42a})$$

$$\partial_r T_3^{[01]}|_{0=} Bi_m T_3^{[01]}(0, x) \quad (\text{E.42b})$$

Conditions à l'interface :

Toutes les grandeurs sont évaluées en  $r = h_3^{[00]}$

$$\Phi_3^{[01]} = 0 \quad (\text{E.43a})$$

$$\partial_r U_3^{[01]} = 0 \quad (\text{E.43b})$$

$$-\partial_r T_3^{[01]} = \Gamma^{lg}_3^{[01]} \quad (\text{E.43c})$$

Bilan de masse :

$$\Gamma_3^{[01]} = \int_0^{h_3^{[00]}} U_3^{[01]} dr - h_3^{[01]} U_3^{[00]}(h_3^{[00]}, x) \quad (\text{E.44a})$$

$$-d_x \Gamma_3^{[01]} = E_{tr} \Gamma^{lg}_3^{[01]} \quad (\text{E.44b})$$

Loi constitutive d'évaporation :

$$K \Gamma^{lg}_3^{[01]} = T_3^{[01]} - h_3^{[01]} \partial_r T_3^{[00]} \quad \text{en} \quad r_3 = h_3^{[00]} \quad (\text{E.45})$$



## E.2.4 Ordre 11

Les simplifications dues à la forme des fonctions aux ordres inférieurs sont prises en compte. Seuls les termes non nuls sont présentés ici.

**Equations de conservation :**

$$\partial_x U_3^{[11]} + \partial_r V_3^{[11]} = 0 \quad (\text{E.46a})$$

$$\partial_{r^2} U_3^{[11]} = 0 \quad (\text{E.46b})$$

$$-\partial_r P_3^{[11]} = 0 \quad (\text{E.46c})$$

$$\partial_{r^2} T_3^{[11]} = 0 \quad (\text{E.46d})$$

**Conditions au mur :**

$$U_3^{[11]}(0, x) = 0 \quad ; \quad V_3^{[11]}(0, x) = 0 \quad (\text{E.47a})$$

$$\partial_r T_3^{[11]}|_{0=} B_{im} T_3^{[11]}(0, x) \quad (\text{E.47b})$$

**Conditions à l'interface :**

Toutes les grandeurs sont évaluées en  $r = h_3^{[00]}$

$$\Phi_3^{[11]} = 0 \quad (\text{E.48a})$$

$$\partial_r U_3^{[11]} = 0 \quad (\text{E.48b})$$

$$-\partial_r T_3^{[11]} = \Gamma^{lg}_3^{[11]} \quad (\text{E.48c})$$

**Bilan de masse :**

$$\Gamma_3^{[11]} = \int_0^{h_3^{[00]}} U_3^{[11]} dr - h_3^{[11]} U_3^{[00]}(h_3^{[00]}, x) \quad (\text{E.49a})$$

$$-d_x \Gamma_3^{[11]} = E_{tr} \Gamma^{lg}_3^{[11]} \quad (\text{E.49b})$$

**Loi constitutive d'évaporation :**

$$K \Gamma^{lg}_3^{[11]} = T_3^{[11]} - h_3^{[11]} \partial_r T_3^{[00]} \quad \text{en} \quad r_3 = h_3^{[00]} \quad (\text{E.50})$$

---

### E.2.5 Ordre 20

Les simplifications dues à la forme des fonctions aux ordres inférieurs sont prises en compte. Seuls les termes non nuls sont présentés ici.

**Equations de conservation :**

$$\partial_x U_3^{[20]} + \partial_r V_3^{[20]} - 2V_3^{[20]} = 0 \quad (\text{E.51a})$$

$$-2\partial_x P_2^{[10]} + \partial_{r^2} U_3^{[20]} - 2\partial_r U_3^{[00]} = 0 \quad (\text{E.51b})$$

$$-\partial_r P_3^{[20]} = 0 \quad (\text{E.51c})$$

$$\partial_{r^2} T_3^{[20]} - 2\partial_r T_3^{[00]} = 0 \quad (\text{E.51d})$$

**Conditions au mur :**

$$U_3^{[20]}(0, x) = 0 \quad ; \quad V_3^{[20]}(0, x) = 0 \quad (\text{E.52a})$$

$$\partial_r T_3^{[20]}|_{0=} Bi_m T_3^{[20]}(0, x) \quad (\text{E.52b})$$

**Conditions à l'interface :**

Toutes les grandeurs sont évaluées en  $r = h_3^{[00]}$

$$\Phi_3^{[20]} = 2 \left( d_{x^2} h_3^{[00]} + h_3^{[00]} \right) \quad (\text{E.53a})$$

$$\partial_r U_3^{[20]} = 0 \quad (\text{E.53b})$$

$$-\partial_r T_3^{[20]} = \Gamma^{lg}_3^{[20]} \quad (\text{E.53c})$$

**Bilan de masse :**

$$\Gamma_3^{[20]} = \int_0^{h_3^{[00]}} \left( U_3^{[20]} - 2r U_3^{[00]} \right) dr - h_3^{[20]} U_3^{[00]}(h_3^{[00]}, x) \quad (\text{E.54a})$$

$$-d_x \Gamma_3^{[20]} = E_{tr} \Gamma^{lg}_3^{[20]} - 2E_{tr} h_3^{[00]} \Gamma^{lg}_3^{[00]} \quad (\text{E.54b})$$

**Loi constitutive d'évaporation :**

$$K \Gamma^{lg}_3^{[20]} = T_3^{[20]} - h_3^{[20]} \partial_r T_3^{[00]} \quad \text{en} \quad r_3 = h_3^{[00]} \quad (\text{E.55})$$

## E.2.6 Ordre 21

Les simplifications dues à la forme des fonctions aux ordres inférieurs sont prises en compte. Seuls les termes non nuls sont présentés ici.

**Equations de conservation :**

$$\partial_x U_3^{[21]} + \partial_r V_3^{[21]} = 0 \quad (\text{E.56a})$$

$$\partial_{r^2} U_3^{[21]} = 0 \quad (\text{E.56b})$$

$$-\partial_r P_3^{[21]} = 0 \quad (\text{E.56c})$$

$$\partial_{r^2} T_3^{[21]} = 0 \quad (\text{E.56d})$$

**Conditions au mur :**

$$U_3^{[21]}(0, x) = 0 \quad ; \quad V_3^{[21]}(0, x) = 0 \quad (\text{E.57a})$$

$$\partial_r T_3^{[21]}|_0 = Bi_m T_3^{[21]}(0, x) \quad (\text{E.57b})$$

**Conditions à l'interface :**

Toutes les grandeurs sont évaluées en  $r = h_3^{[00]}$

$$\Phi_3^{[21]} = 0 \quad (\text{E.58a})$$

$$\partial_r U_3^{[21]} = 0 \quad (\text{E.58b})$$

$$-\partial_r T_3^{[21]} = \Gamma^{lg}_3^{[21]} \quad (\text{E.58c})$$

**Bilan de masse :**

$$\Gamma_3^{[21]} = \int_0^{h_3^{[00]}} U_3^{[21]} dr - h_3^{[21]} U_3^{[00]}(h_3^{[00]}, x) \quad (\text{E.59a})$$

$$-d_x \Gamma_3^{[21]} = E_{tr} \Gamma^{lg}_3^{[21]} \quad (\text{E.59b})$$

**Loi constitutive d'évaporation :**

$$K \Gamma^{lg}_3^{[21]} = T_3^{[21]} - h_3^{[21]} \partial_r T_3^{[00]} \quad \text{en} \quad r_3 = h_3^{[00]} \quad (\text{E.60})$$

# Bibliographie

- [1] V. S. Ajaev. Spreading of thin volatile liquid droplets on uniformly heated surfaces. *J. Fluid Mech.*, 528:279–296, 2005. [7.5.2](#), [A.3](#)
- [2] H. Akachi. US Patent 4921041, 1990. [1.2](#)
- [3] H. Akachi. US Patent 5219020, 1993. [1.2](#)
- [4] H. Akachi. US Patent 5490558, 1994. [1.2](#)
- [5] P. Aussillous and D. Quéré. Quick deposition of a fluid on the wall of a tube. *Physics of Fluids*, 12(10):2367–2371, 2000. [1.5.1](#), [1.5.1](#)
- [6] V. Ayel, L. Araneo, A. Scalambra, M. Mameli, C. Romestant, A. Piteau, M. Marengo, S. Filippeschi, and Y. Bertin. Experimental study of a closed loop flat plate pulsating heat pipe under a varying gravity force. *International Journal of Thermal Sciences*, 96(0):23 – 34, 2015. [1.2](#)
- [7] M. Barthes, C. Reynard, R. Santini, and L. Tadrist. Non-condensable gas influence on the marangoni convection during a single vapour bubble growth in a subcooled liquid. *EPL (Europhysics Letters)*, 77(1):14001, 2007. [2.3.1](#)
- [8] A. M. Benselama, S. Harmand, and K. Sefiane. Thermocapillary effects on steadily evaporating contact line: A perturbative local analysis. *Physics of Fluids*, 24(7), 2012. [1.4.3](#), [2.3.2](#), [3.3.2](#), [6.2.3](#), [6.2.4](#), [6.3](#)
- [9] AL Bertozzi, A Münch, and M Shearer. Undercompressive shocks in thin film flows. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 134(4):431–464, 1999. [1.5.2](#)
- [10] C.H. Bosanquet. Lv. on the flow of liquids into capillary tubes. *Philosophical Magazine Series 6*, 45(267):525–531, 1923. [7.1](#)
- [11] H. Brenner and J. Happel. Slow viscous flow past a sphere in a cylindrical tube. *Journal of Fluid Mechanics*, 4:195–213, 6 1958. [D.1](#)
- [12] F. P. Bretherton. The motion of long bubbles in tubes. *Journal of Fluid Mechanics*, 10:166–188, 3 1961. [1.5.1](#), [1.5.1](#), [1.5.2](#), [2.1.2](#), [3.5.2](#), [3.5.3](#), [4.3](#), [4.5](#), [5.1.2](#), [5.6.3](#), [5.7](#), [7.5.3](#)
- [13] S.G. Burelbach, J.P. Bankoff and S.H. Davis. Nonlinear stability of evaporating/condensing liquid films. *J. Fluid Mech.*, 195:463–494, 1988. [1.4.1](#), [7.5.2](#), [A.3](#)
- [14] Van P. Carey. *Liquid-Vapor Phase-Change Phenomena*. Hemisphere Publishing Corporation, New York, NY, 1st edition, 1992. [A.1](#), [A.2.4](#)

- [15] S.H. Chan, Z. Kanai, and W.T. Yang. Theory of a rotating heat pipe. *Journal of Nuclear Energy*, 25(10):479 – 487, 1971. [1.1](#)
- [16] A. Chatterjee, J. L. Plawsky, and P. C. Wayner. Disjoining pressure and capillarity in the constrained vapor bubble heat transfer system. *Advances in colloid and interface science*, 168(1):40–49, 2011. [1.4.3](#)
- [17] N. Chauris, V. Ayel, Y. Bertin, and C. Romestant. Evaporation of a liquid film deposited on a capillary heated tube: Experimental analysis by infrared thermography of its thermal footprint. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 86:492 – 507, 2015. [2.2.1](#)
- [18] R. V. Craster, O. K. Matar, and K. Sefiane. Pinning, retraction, and terracing of evaporating droplets containing nanoparticles. *Langmuir*, 25(6):3601–3609, 2009. PMID: 19275181. [7.5.2](#)
- [19] S.P. Das, V.S. Nikolayev, F. Lefevre, B. Pottier, S. Khandekar, and J. Bonjour. Thermally induced two-phase oscillating flow inside a capillary tube. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53:3905 – 3913, 2010. [\(document\)](#), [1.5](#), [1.3](#)
- [20] M. Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall Inc., Engleton Cliffs, NJ, 1976. [B](#), [B](#)
- [21] R. T. Dobson. Theoretical and experimental modelling of an open oscillatory heat pipe including gravity. *International Journal of Thermal Sciences*, 43(2):113 – 119, 2004. [1.3](#)
- [22] P. R. Garabedian and M. Schiffer. Convexity of domain functionals. *Journal d’Analyse Mathématique*, 2:281–368, 1953. [3.3.2](#)
- [23] M. Garg, A. Rao, and S.L. Kalla. On a generalized finite hankel transform. *Applied Mathematics and Computation*, 190(1):705 – 711, 2007. [2.2.1](#)
- [24] M. J. Gluckman, R. Pfeffer, and S. Weinbaum. A new technique for treating multi-particle slow viscous flow: axisymmetric flow past spheres and spheroids. *Journal of Fluid Mechanics*, 50:705–740, 12 1971. [D.1](#)
- [25] M. J. Gluckman, S. Weinbaum, and R. Pfeffer. Axisymmetric slow viscous flow past an arbitrary convex body of revolution. *Journal of Fluid Mechanics*, 55(04):677–709, 1972. [D.1](#)
- [26] S. Goldstein and Aeronautical Research Council (Great Britain). *Modern developments in fluid dynamics: an account of theory and experiment relating to boundary layers, turbulent motion and wakes*. Oxford engineering science series. The Clarendon Press, 1938. [5.1.4](#), [5.1.4](#)
- [27] T. Greenstein and J. Happel. Theoretical study of the slow motion of a sphere and a fluid in a cylindrical tube. *Journal of Fluid Mechanics*, 34:705–710, 12 1968. [D.1](#)
- [28] G.M. Grover. US Patent 3229759, Filed 1963. [1.1](#)
- [29] G.M. Grover, T.P. Cotter, and G.F. Erickson. Structures of very high thermal conductances. *J. App. Phys.*, 35:1990, 1964. [1.1](#)
- [30] W.L. Haberman and R.M. Sayre. Motion of rigid and fluid spheres in stationnary and moving liquids inside cylindrical tubes. Technical Report No. 1143, David Taylor Model Bassin Report, 1958. [D.1](#), [D.2](#)

- 
- [31] J. Hadamard. *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées*. Nabu Press, Charleston, SC, 10th edition, 2010. [3.3.2](#)
  - [32] Y. Han and N. Shikazono. Measurement of the liquid film thickness in micro tube slug flow. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 30(5):842 – 853, 2009. The 3rd International Conference on Heat Transfer and Fluid Flow in MicroscaleThe 3rd International Conference on Heat Transfer and Fluid Flow in Microscale. [5.7](#)
  - [33] Y. Han and N. Shikazono. The effect of bubble acceleration on the liquid film thickness in micro tubes. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 31(4):630 – 639, 2010. [5.7](#)
  - [34] J. Happel and H. Brenner. *Low Reynolds Number Hydrodynamics*. Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, 3rd edition, 1983. [D.1](#)
  - [35] K. Hayashi, S. Hosoda, G. Tryggvason, and A. Tomiyama. Effects of shape oscillation on mass transfer from a taylor bubble. *International Journal of Multiphase Flow*, 58:236 – 245, 2014. [1.5.1](#)
  - [36] M. Heil. Finite reynolds number effects in the bretherton problem. *Physics of Fluids*, 13(9), 2001. [4.6](#)
  - [37] V. Janeček. *Evaporation à l'échelle microscopique et à haut flux thermique*. PhD thesis, 2012. Thèse de doctorat dirigée par Nikolayev, Vadim S. Physique Paris 6 2012. [1.4.3](#), [1.5.2](#), [7.5.3](#)
  - [38] D. D. Joseph. Parameter and domain dependence of eigenvalues of elliptic partial differential equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 24:325–351, 1967. [3.3.2](#)
  - [39] D. D. Joseph and R. L. Fosdick. The free surface on a liquid between cylinders rotating at different speeds. Part I. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 49(5):321–381, 1973. [3.3.2](#)
  - [40] A. Kaled, S. Dutour, V. Platel, and J. Lluc. Experimental study of a capillary pumped loop for cooling power electronics: Response to high amplitude heat load steps. *Applied Thermal Engineering*, 89:169 – 179, 2015. [1.1](#)
  - [41] S Kalliadasis and H-C Chang. Apparent dynamic contact angle of an advancing gas-liquid meniscus. *Physics of Fluids*, 6:12–23, 1994. [1.4.3](#), [1.5.1](#), [2.1.2](#), [6.1.3](#)
  - [42] D. Kearney and J. Griffin. An open loop pulsating heat pipe for integrated electronic cooling applications. *ASME J. Heat Transfer*, 136:8, 2014. [\(document\)](#), [1.3](#)
  - [43] S. Khandekar. *Thermo-hydrodynamics of Closed Loop Pulsating Heat Pipes*. PhD thesis, Univ. Stuttgart, Germany, 2004. [\(document\)](#), [1.2](#), [1.4](#)
  - [44] S. Khandekar, P. K. Panigrahi, F. Lefèvre, and J. Bonjour. Local hydrodynamics of flow in a pulsating heat pipe: a review. *Front. Heat Pipes*, 1:1–20, 2010. [1.3](#)
  - [45] E. Lauga, M. Brenner, and H. Stone. *Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics*, chapter Microfluidics: The No-Slip Boundary Condition, pages 1219–1240. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2007. [1.4.3](#)
  - [46] S. Leichtberg, R. Pfeffer, and S. Weinbaum. Stokes flow past finite coaxial clusters of spheres in a circular cylinder. *International Journal of Multiphase Flow*, 3(2):147 – 169, 1976. [5.1.4](#), [D.1](#)

- [47] S. Lips, A. Bensalem, Y. Bertin, V. Ayel, C. Romestant, and J. Bonjour. Experimental evidences of distinct heat transfer regimes in pulsating heat pipes (php). *Applied Thermal Engineering*, 30(8-9):900 – 907, 2010. [1.2](#)
- [48] R. Lucas. Ueber das zeitgesetz des kapillaren aufstiegs von flüssigkeiten. *Kolloid-Zeitschrift*, 23(1):15–22, 1918. [7.1](#)
- [49] S. Madani, O. Caballina, and M. Souhar. Some investigations on the mean and fluctuating velocities of an oscillating taylor bubble. *Nuclear Engineering and Design*, 252:135 – 143, 2012. [1.5.1](#)
- [50] M. Mameli, L. Araneo, S. Filippeschi, L. Marelli, R. Testa, and M. Marengo. Thermal response of a closed loop pulsating heat pipe under a varying gravity force. *International Journal of Thermal Sciences*, 80(0):11 – 22, 2014. [1.2](#)
- [51] M. Mameli, V. Manno, S. Filippeschi, and M. Marengo. Thermal instability of a closed loop pulsating heat pipe: Combined effect of orientation and filling ratio. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 59(0):222 – 229, 2014. [1.2](#)
- [52] R. Marek and J. Straub. Analysis of the evaporation coefficient and the condensation coefficient of water. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 44:39–53, 2001. [A.2.4](#)
- [53] B. Mathieu. *Étude physique, expérimentale et numérique des mécanismes de base intervenant dans les écoulements diphasiques*. PhD thesis, 2003. Thèse de doctorat dirigée par Tadrist, L., Université de Provence. [1.4.3](#), [1.5.2](#), [7.5.3](#)
- [54] B. Mehta and S. Khandekar. Taylor bubble-train flows and heat transfer in the context of pulsating heat pipes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 79(0):279 – 290, 2014. [1.2](#)
- [55] S. Moosman and G.M. Homsy. Evaporating menisci of wetting fluids. *J. Colloid Interface Sci.*, 73(1):212–223, 1980. [1.4.3](#), [7.5.2](#), [A.3](#)
- [56] S. J. S. Morris. A phenomenological model for the contact region of an evaporating meniscus on a superheated slab. *Journal of Fluid Mechanics*, 411:59–89, 5 2000. [1.5.2](#)
- [57] S. J. S. Morris. Contact angles for evaporating liquids predicted and compared with existing experiments. *Journal of Fluid Mechanics*, 432:1–30, 4 2001. [1.5.2](#)
- [58] M. Nikitkin and B. Cullimore. CPL and LHP technologies : What are the differences, what are the similarities? Technical report, SAE Technical Paper 981587, 1998. [1.1](#)
- [59] V. S. Nikolayev. Towards predictive modeling of pulsating heat pipes. In *Proc. 16th Int. Heat Pipe Conf.*, Lyon, France, 2012. [1.3](#)
- [60] V. S. Nikolayev. Oscillatory instability of the gas-liquid meniscus in a capillary under the imposed temperature difference. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 64:313 – 321, 2013. [1.3](#)
- [61] S. Nukiyama. The maximum and minimum values of the heat  $q$  transmitted from metal to boiling water under atmospheric pressure. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 9(12):1419 – 1433, 1966. ([document](#))
- [62] S.S. Panchamgam, A. Chatterjee, J.L. Plawsky, and P.C. Jr. Wayner. Comprehensive experimental and theoretical study of fluid flow and heat transfer in a microscopic evaporating meniscus in a miniature heat exchanger. *Int. J. Heat Mass Trans.*, 51:5368–5379, 2008. [1.4.3](#)

- 
- [63] C.-W. Park and G. M. Homsy. Two-phase displacement in hele shaw cells: theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 139:291–308, 2 1984. [1.5.1](#), [2.1.2](#), [3.5.2](#), [5.1.2](#), [5.6.3](#)
  - [64] L. E. Payne and W. H. Pell. The stokes flow problem for a class of axially symmetric bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, 7:529–549, 4 1960. [D.1](#)
  - [65] R. Ponnappan and J. Leland. Rotating heat pipe for high speed motor/generator cooling. *SAE Technical Paper*, (981287), 1998. [1.1](#)
  - [66] M. Jr. Potash and P.C Jr. Wayner. Evaporation from a two-dimensional extended meniscus. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15(10):1851–1863, 1972. [1.4.3](#)
  - [67] J. Ratulowski and H.-C. Chang. Marangoni effects of trace impurities on the motion of long gas bubbles in capillaries. *Journal of Fluid Mechanics*, 210:303–328, 1 1990. [1.5.1](#), [2.1.2](#), [3.5.2](#)
  - [68] D.A. Reay, P.A. Kew, and R. McGlen. *Heat Pipes : Theory, Design and Applications*. Butterworth-Heinemann, Oxford, England, 2013. [1.1](#)
  - [69] V. Recklin, A. Pattamatta, and P. Stephan. Experimental investigation on the thermo-hydrodynamics of oscillatory meniscus in a capillary tube using fc-72 as working fluid. *International Journal of Multiphase Flow*, 75:82 – 87, 2015. [1.5.1](#)
  - [70] N. Reinecke and D. Mewes. Oscillatory transient two-phase flows in single channels with reference to monolithic catalyst supports. *International Journal of Multiphase Flow*, 25(6-7):1373 – 1393, 1999. [1.5.1](#)
  - [71] F. Renk, P.C. Jr. Wayner, and G.M. Homsy. On the transition between a wetting film and a capillary meniscus. *J. Colloid Interface Sci.*, 67(3):408–414, 1978. [1.4.3](#)
  - [72] R. W. Schrage. *A theoretical study of interphase mass transfer*. PhD thesis, New York, NY, 1953. [A.1](#), [A.2.1](#), [A.2.1](#), [A.2.3](#)
  - [73] L.E. Scriven and C.V. Sternling. On cellular convection driven by surface-tension gradients: effects of mean surface tension and surface viscosity. *J. Fluid Mech.*, 19(3):321–340, 1964. [1.4.1](#)
  - [74] A.K. Sen and S.H. Davis. Steady thermocapillary flows in two-dimensional slots. *J. Fluid Mech.*, 121:163–186, 1982. [1.4.1](#)
  - [75] M. B. Shafii, A. Faghri, and Y. Zhang. Thermal modeling of unlooped and looped pulsating heat pipes. *Journal of Heat Transfer*, 123(6):1159–1172, 2001. [1.3](#)
  - [76] B. Siedel, V. Sartre, and F. Lefevre. Complete analytical model of a loop heat pipe with a flat evaporator. *International Journal of Thermal Sciences*, 89:372 – 386, 2015. [1.1](#)
  - [77] M. K. Smith and S. H. Davis. Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. Part 1. Convective instabilities. *J. Fluid Mech.*, 132:119–144, 1983. [1.4.1](#)
  - [78] I. N. Sneddon. *Fourier Transforms*. Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, NY, 1st edition, 1951. [2.2.1](#), [2.2.1](#)
  - [79] J. H. Snoeijer. Avoided critical behavior in dynamically forced wetting. *Phys. Rev. Lett.*, 96, 2006. [\(document\)](#), [1.5.2](#), [1.5.2](#), [1.6](#)



- [80] J. H. Snoeijer. Free-surface flows with large slopes: Beyond lubrication theory. *Physics of Fluids*, 18, 2006. [1.4.1](#)
- [81] F. Song, D. Ewing, and C.Y. Ching. Experimental investigation on the heat transfer characteristics of axial rotating heat pipes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47(22):4721 – 4731, 2004. [1.1](#)
- [82] G. Spinato, N. Borhani, B. P. d’Entremont, and J. R. Thome. Time-strip visualization and thermo-hydrodynamics in a closed loop pulsating heat pipe. *Applied Thermal Engineering*, 78(0):364 – 372, 2015. [1.2](#)
- [83] O. V. Voinov. Hydrodynamics of wetting. *Fluid Dynamics*, 11(5):714–721. [1.4.3](#)
- [84] E. W. Washburn. The dynamics of capillary flow. *Phys. Rev.*, 17:273–283, Mar 1921. [7.1](#)
- [85] P.C. Jr. Wayner, S. DasGupta, and J.A. Schonberg. Effect of interfacial forces on evaporative heat transfer in a meniscus. Technical Report WL-TR-91-2061, Wright Laboratory, 1991. [1.4.3](#), [2.3.2](#), [6.2.3](#), [6.2.4](#), [6.3](#)
- [86] P. C. Wayner Jr. The effect of interfacial mass transport on flow in thin liquid films. *Colloids Surfaces*, 52(0):71 – 84, 1991. A Collection of Invited Papers Presented at an International Symposium on Thin Solid and Liquid Films. [1.4.3](#), [7.5.2](#), [A.3](#)
- [87] P.C. Wayner Jr, Y.K. Kao, and L.V. LaCroix. The interline heat-transfer coefficient of an evaporating wetting film. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 19:487–492, 1976. [A.3](#)
- [88] S. K. Wilson, S. H. Davis, and S. G. Bankoff. The unsteady expansion and contraction of a long two-dimensional vapour bubble between superheated or subcooled parallel plates. *Journal of Fluid Mechanics*, 391:1–27, 7 1999. [1.5.1](#), [2.3.2](#), [2.4.2](#), [4.3](#), [7.5.2](#), [A.3](#)
- [89] Y. Zhang and A. Faghri. Heat transfer in a pulsating heat pipe with open end. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45(4):755–764, 2002. [1.3](#)

# Résumé

Dans le cadre d'une contribution à la modélisation des caloducs oscillants, le modèle mis en place se résume à une bulle seule se déplaçant dans un tube de dimension capillaire. Une densité volumique de chaleur est considérée dans la paroi du capillaire, et la température de référence considérée n'est pas la température de saturation de la phase vapeur, mais la température extérieure au tube ce qui permet la variation de la température de saturation dans le temps et une meilleure adéquation du modèle avec la réalité. La résolution du modèle est effectuée par étapes selon la technique de perturbation du domaine, et les effets physiques de moindres importances peuvent être ajoutés au problème simplifié, en particulier les effets inertiels. Cette résolution a permis de définir une nouvelle corrélation portant sur la hauteur de film déposé par le bouchon liquide en mouvement en fonction du nombre capillaire et d'un nombre d'évaporation représentant l'intensité du chargement thermique. Ce modèle permettra aussi d'étudier l'influence réciproque des champs de vitesse et de température sur le bouchon de liquide devant le ménisque en déplacement. La résolution du problème associé à la partie arrière de la bulle met en évidence la formation d'un bourrelet de liquide entre le film de liquide déposé à la paroi et le ménisque arrière. La taille de ce bourrelet est fortement dépendante de la densité de flux de chaleur imposée à la paroi. Dans le cas où le ménisque arrière remouille un film adsorbé laissé à la paroi après assèchement du film, la ligne triple présente des ondulations axiales dues à son déplacement, et non au chargement thermique. La densité de flux de masse évaporée à l'interface liquide-vapeur entraîne une modification non seulement de la température de saturation, mais aussi de la masse de la bulle. Un modèle thermodynamique de la phase vapeur a été mis en place pour étudier les paramètres importants influençant les variations temporelles des caractéristiques géométriques et thermodynamiques de la bulle.

**Mots-clés:** Bulles-Dynamique, Evaporation, Perturbation (mathématique), Transfert diphasique, Caloduc oscillant, Interface gaz-liquide.

# Abstract

The model of a single bubble moving in a capillary tube is written as a contribution to the modeling of Pulsating Heat Pipes. A constant heat load is considered at the wall, and the reference temperature of the problem is defined to be the outside medium temperature, which is closer to reality, and thus allowing the saturation temperature of the vapor phase to vary. Using domain perturbation techniques, a step-by-step resolution of the model is implemented, allowing minor physical effects to be taken into consideration, for example the inertial effect on the receding meniscus. A new correlation is proposed on the thickness of the liquid film deposited by the receding meniscus, by means of the capillary number and an evaporation number representing the thermal condition. The velocity and temperature fields in the liquid plug ahead of the meniscus can also be obtained. The resolution of the problem associated with the rear-end of the bubble, where the rear meniscus advances on either a micrometric liquid film or an adsorbed film left by the dry-out of the capillary wall, shows a corrugating liquid-vapor interface. The magnitude of these corrugations is strongly dependent on the value of the heat load applied at the wall. In the case of wall rewetting, the interface corrugations at the triple line are due to its displacement, and not to the thermal boundary condition. Because the evaporative mass flux through the liquid-vapor interface modifies the vapor bubble mass, a complete transient thermodynamical model of the bubble is implemented. In this case, the important parameters controlling the kinematics, dynamics and thermodynamics of the bubble were identified.

**Keywords:** Bubbles-Dynamics, Evaporation, Perturbation (Mathematics), Two-phase flow, Pulsating heat pipe, Gas-liquid interfaces.

